

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XXVIII



Palchetto

Num.° d'ordine

70

25/29

17-8.31

NAZIONALE

B. Prov.

I

1932

NAPOLI

R. BIBLIOTECA

VITT. EM. III

B. Trer.

I

1932

LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEWTONIANÆ.

27. 11. 1914



608131

ISAACI NEWTONI

ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS;

SEQUITUR

ILLUSTRATIO EJUSDEM TRACTATUS

AUCTORE JACOBO STIRLING.



PARISIIS,

Impensis J. B. M. DUPRAT, Bibliopolæ.

M. DCC. XCVII.

12127

MONITUM BIBLIOPOLÆ.

NUNC denuò prodit in lucem eximium opus quod ad enucleandum summi Newtoni tractatum de enumeratione linearum tertii ordinis composuit Jacobus Stirling : cujus rarissimi libri alteram editionem jam dudùm Geometræ desiderabant. Eorum votis ut satisfacerem, usus consilio viri in re mathematicâ præstantis, ad id præsertim incubui ut nova hæc satis eleganter et quam emendatissimè perficeretur, sublatis erroribus Typographicis qui in editionem Oxoniensem anni 1717 frequentes irrepserant. Figuræ tabulis æneis ad venustatem incisæ, calculus per symbola ab integro ad examen est revocatus. Opportunum prætereà duxi commentario præmittere ipsam Newtoni enumerationem, ut teneant sublimioris Geometriæ studiosi, in uno eodemque volumine collectam et integram

totius argumenti delineationem. Manca enim est ex hoc etiam capite et incommoda prima editio quæ lectores remittit ad Newtoni tractatum inter reliqua ejus opera excusum, ut hinc necesse habeant duos eodem tempore libros in manibus versare.

Meum non est de Newtoni et Stirlingii meritis dicere : id unum rogo ut Geometræ curam hanc meam æqui bonique accipiant. Eos enim si primis hisce conatibus favere videro, alacri animo aggrediar celebriorum quæ in Mathematicis maximè rara sunt monumentorum editionem, daturus fortassè veteris Græci Geometræ opus ineditum, et hactenùs frustrà desideratum.

I N D E X

EORUM QUÆ PRÆSENTI

VOLUMINE INVENIUNTUR.

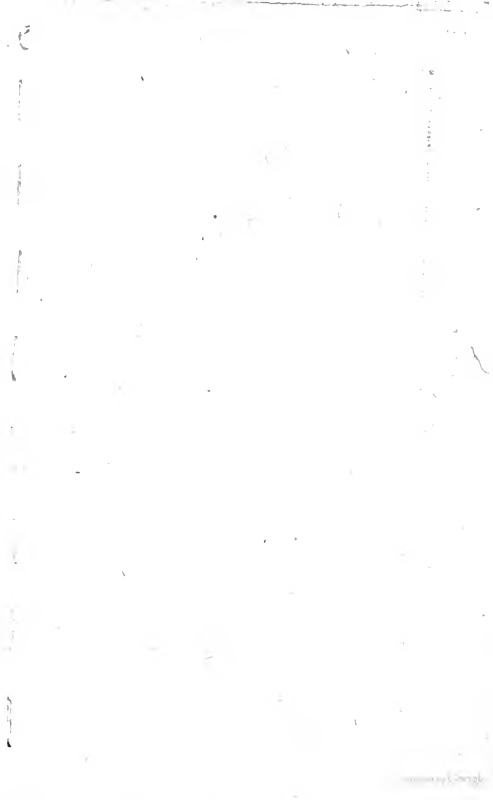
ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

I. <i>Linearum ordines.</i>	pag. 1.
II. <i>Proprietates sectionum conicarum competunt curvis superiorum generum.</i>	2.
<i>De curvarum secundi generis ordinatis, Diametris, Verticibus, centris, axibus.</i>	<i>ibid.</i>
<i>De Asymptotis et earum proprietatibus.</i>	3
<i>De lateribus rectis et transversis.</i>	4.
<i>De ratione contentorum sub Parallelorum segmentis.</i>	5.
<i>De cruribus hyperbolicis et parabolicis, et eorum plagis.</i>	6.
III. <i>Reductio curvarum omnium generis secundi ad æquationum casus quatuor.</i>	7.
<i>Nomina formarum.</i>	9.
IV. <i>Enumeratio curvarum.</i>	11.
V. <i>Genesis curvarum per umbras.</i>	28.
<i>De curvarum punctis duplicibus.</i>	29.
VI. <i>De curvarum descriptione organica.</i>	30.
<i>Sectionum conicarum descriptio per data quinque puncta.</i>	31.
<i>Curvarum secundi generis punctum duplex habentium descriptio per data septem puncta.</i>	32.
VII. <i>Constructio æquationum per descriptionem curvarum.</i>	34.

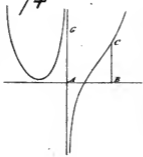
 LINEÆ TERTII ORDINIS NEWTONIANÆ.

<i>Definitiones.</i>	39.
<i>Linearum rationalium ordines.</i>	41.
<i>Numerus coefficientium in illis æquationibus.</i>	42.
<i>De serierum infinitarum ortu.</i>	45.
<i>De naturâ serierum.</i>	46.
<i>Radix unica in serie eò citiùs convergente quo major est x.</i>	63.
<i>Methodus determinandi formam seriei.</i>	72.
<i>De æquationum resolutione in numeris.</i>	84.
<i>Invenire Asymptotos curvarum.</i>	94.
<i>Invenire numerum et plagam crurum Asymptoton aliquam-adjacentium.</i>	103.
<i>Methodus determinandi radices reales et imaginarias æquationis cubicæ.</i>	111.
<i>Invenire numerum punctorum quæ determinant lineam alicujus ordinis.</i>	115.
<i>Enumeratio Linearum secundi ordinis.</i>	125.
<i>Enumeratio Linearum tertii ordinis.</i>	129.
<i>Determinatio Locorum Geometricorum.</i>	170.

<i>Invenire lineam celerrimi descensûs, datâ lege vis centripetæ.</i>	179.
<i>Datâ lineâ celerrimi descensûs invenire legem vis centripetæ.</i>	189.
<i>Methodus disponendi quocunque sphæras in fornicem; et inde demonstratur proprietas præcipua Curvæ Catenariæ.</i>	190.
<i>Invenire Lineam quæ ad angulos rectos secabit omnes hyperbolas conicas iisdem verticibus et circâ eundem axem descriptas.</i>	194.



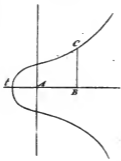
74



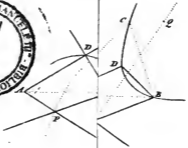
76

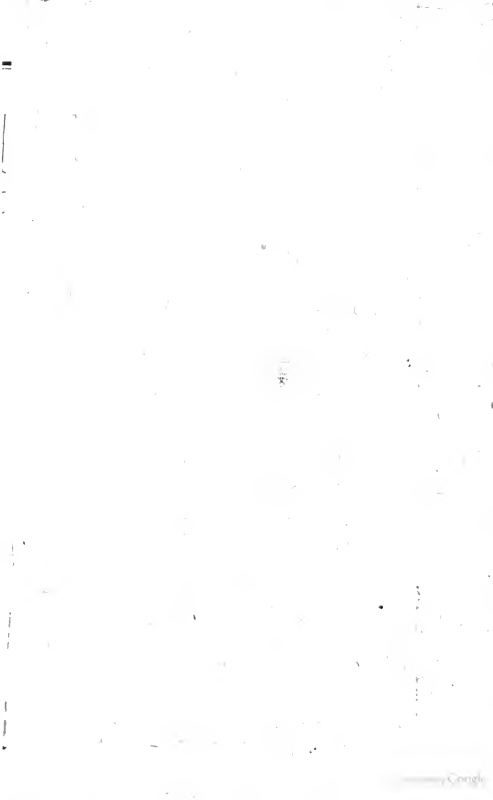


79

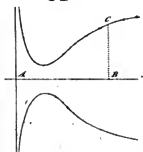


845

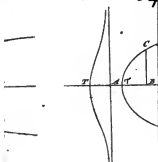




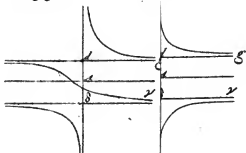
61



64



66

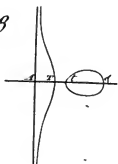


71

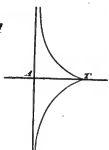




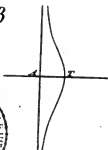
48



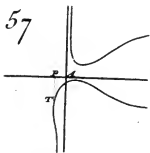
51

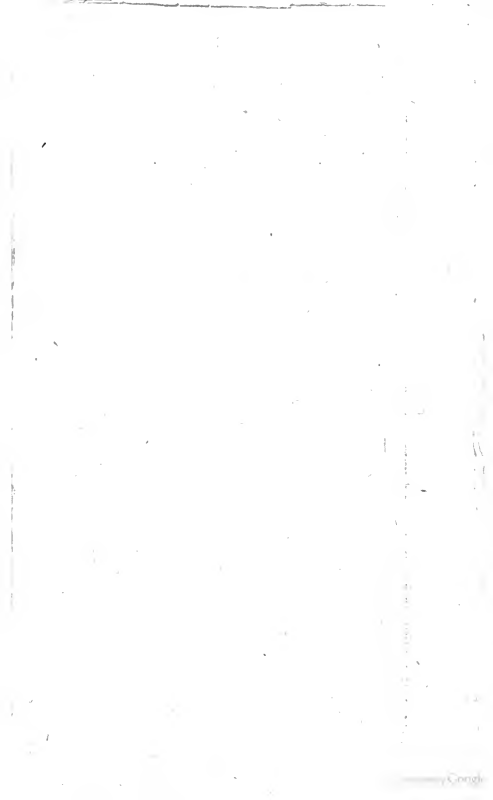


53

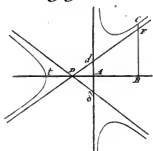


57

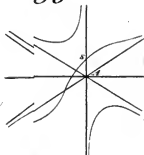




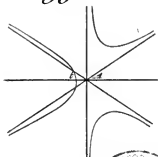
33



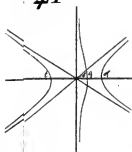
36



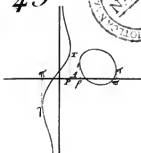
38



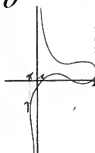
41



43

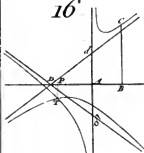


46

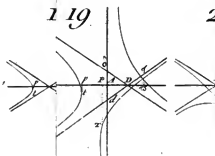


THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

16



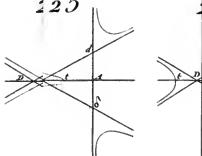
19



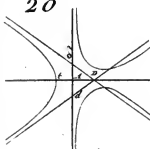
22



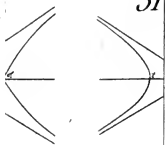
25



28



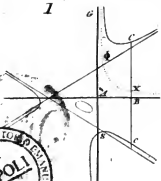
31



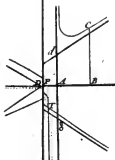
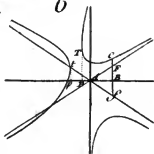




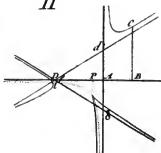
I



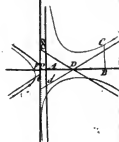
6



II



I



ISAACI NEWTONI
ENUMERATIO LINEARUM
TERTII ORDINIS.

I.

Linearum ordines.



LINEÆ Geometricæ secundùm numerum dimensionum æquationis, quâ relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quod perindè est) secundùm numerum punctorum, in quibus à lineâ rectâ secari possunt, optimè distinguuntur in ordines. Quâ ratione Linea primi ordinis erit Recta sola; eæ secundi sive quadratici ordinis erunt Sectiones conicæ et Circulus; et eæ tertii sive cubici ordinis Parabola cubica, Parabola *Neiliana*, Cissois veterum, et reliquæ, quas hîc enumerare suscepimus. Curva autem primi generis, (si quidem recta inter Curvas non est numeranda) eadem est cum Lineâ secundi ordinis; et curva secundi generis eadem cum Lineâ ordinis tertii. Et Linea ordinis infinitesimi ea est, quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, et Linea omnis, quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

A

I I.

*Proprietates Sectionum conicarum
competunt Curvis superiorum generum.*

Sectionum conicarum proprietates præcipuæ à Geometris passim traduntur. Et consimiles sunt proprietates Curvarum secundi generis, et reliquarum, ut ex sequenti proprietatum præcipuarum enumeratione constabit.

*1. De Curvarum secundi generis Ordinatis,
Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ, et ad conicam sectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, idèd-que dicitur *Diameter* figuræ; et rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum; et concursus omnium Diametrorum est *Centrum* figuræ; et intersectio Curvæ et Diametri *Vertex* nominatur; et Diameter illa *Axis* est, cui ordinatim applicatæ insistent ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: Recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex

altero latere ad curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas, curvæque in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*; et rectam secantem, cui ordinatim applicantur, *Diametrum*; et intersectionem Diametri et curvæ, *Verticem*; et concursum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad ordinatas rectangula, si modò aliqua sit, etiam *Axis* dici potest; et ubi omnes Diametri in eodem puncto concurrunt istud erit *Centrum générale*.

2. *De Asymptotis, et earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor, et non plures habere potest, et sic in reliquis. Et quemadmodum partes Lineæ cujusvis rectæ inter Hyperbolam conicam et duas ejus *Asymptotos* sunt hinc indè æquales: sic, in Hyperbolis secundi generis, si ducatur recta quævis secans tam Curvam, quàm tres ejus *Asymptotos* in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ, quæ à duobus quibusvis *Asymptotis* in eandem plagam ad duo puncta

curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. De Lateribus rectis et transversis.

Et, quemadmodum in conicis sectionibus non Parabolicis, Quadratum ordinatim applicatæ, hoc est Rectangulum ordinarum, quæ ad contrarias partes diametri ducuntur, est ad Rectangulum partium Diametri, quæ ad vertices Ellipseos, vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam Linea, quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri, quæ inter vertices jacet et dicitur *Latus transversum*: sic in curvis non Parabolicis secundi generis Parallelepipedum sub tribus ordinatim applicatis est ad Parallelepipedum sub partibus Diametri ad ordinatas et tres vertices figuræ abscissis, in ratione quadam datâ: in quâ ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes Diametri inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Lateræ recta* figuræ; et illæ partes Diametri inter vertices *Lateræ transversa*. Et, sicut in Parabolâ conicâ, quæ ad unam et eandem Diametrum unicum tantum habet verticem, Rectangulum sub ordinatis æquatur Rectangulo sub parte Diametri, quæ ad ordinatas, et verticem abscin-

ditur et rectâ quadam datâ, quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi generis, quæ non nisi duos habent vertices ad eandem Diametrum, Parallelepipedum sub ordinatis tribus æquatur Parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad ordinatas et vertices illos duos abscissis, et rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.*

Denique, sicut in conicis sectionibus, ubi duæ parallelæ, ad curvam utrinque terminatæ secantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, et secunda à quartâ, Rectangulum partium primæ est ad Rectangulum partium tertiæ, ut Rectangulum partium secundæ ad Rectangulum partium quartæ: sic, ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi generis, singulæ in tribus punctis, Parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad Parallelepipedum partium tertiæ, ut Parallelepipedum partium secundæ ad Parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis et Parabolicis, et eorum plagis.*

Curvarum secundi, et superiorum generum, æquè atque primi, crura omnia in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* sunt generis, vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Asymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum* quod Asymptoto destituitur. Hæc crura ex Tangentibus optimè dignoscuntur. Nam, si Punctum contactûs in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Asymptoto coincidat, et Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evanescet et nullibi reperietur. Invenitur igitur Asymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad Punctum infinitè distans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo positionem Rectæ cujusvis, quæ tangenti parallela est ubi punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

I I I.

*Reductio Curvarum omnium generis
secundi ad æquationum casus quatuor.*

Lineæ omnes ordinis primi, tertii, quinti, septimi, et imparis cujusque, duo habent, ad minimum, crura in infinitum versùs plagas oppositas progredientia. Et Lineæ omnes tertii ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppositas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Cartesianâ*) tendunt.

C A S. I.

Si crura illa sint Hyperbolici generis, sit TAB. I.
(fig. 1.) G A S eorum Asymptotos, et huic parallela agatur Recta quævis C B c ad curvam utrinque, (si fieri potest,) terminata, eademque biseccetur in puncto X, et locus puncti illius X erit Hyperbola conica, (putâ X Φ ,) cujus una Asymptotos est A G. Sit ejus altera Asymptotos A B, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C, et abscissam A B definitur, si A B dicatur x et B C y , semper inducet hanc formam

$$x y y + e y = a x^3 + b x x + c x + d,$$

TAB. I. ubi termini, e, a, b, c, d , designant quantitates datas signis suis + et - affectas, quarum quælibet deesse possunt, modò ex earum defectu figura in sectionem conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa conica cum Asymptotis suis coincidere, id est punctum X in rectâ A B locari: et tunc terminus + $e y$ deest.

C A S. I I.

At si (*fig. 2.*) Recta illa C B c non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantùm puncto occurrit: age quamvis positione datam Rectam A B Asymptoto A S occurrentem in A, ut et aliam quamvis B C Asymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in puncto C, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et abscissam A B definitur, semper induet hanc formam,

$$x y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

C A S. I I I.

Quòd si crura illa opposita Parabolici sint generis, Recta (*fig. 3.*) C B c ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur, et bisecetur in B, et locus puncti B erit Linea recta. Sit ista A B, terminata ad datum quodvis punctum A, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et

abscissam A B definitur, semper induet hanc TAB. I. formam,

$$y^3 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

C A S. I V.

At verò si (fig. 4.) recta illa C B c in unico tantùm puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit; sit Punctum illud C, et incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam, positione datam, et ad datum quodvis punctum A terminatam, A B: et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et abscissam A C definitur, semper induet hanc formam,

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus, *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptotôn angulo ad instar Hyperbolæ conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur et altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate suâ se invicem respiciunt, et in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate suâ se invicem respiciunt et in plagas contrarias

TAB. I. diriguntur; *Cruribus contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, et in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo et cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat, et utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ seipsam decussat in orbem redeundo; *Cuspidatam*, cujus partes duæ in angulo contactis concurrunt et ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet ovalem infinitè parvam, id est, Punctum; et *Puram*, quæ per impossibilitatem duarum radicum, Ovali, Nodo, Cuspide et Puncto conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *eruciformem*, *nodatam*, *cuspidatam*, *punctatam* et *puram* nominabimus.

In casu primo si terminus $a x^2$ affirmativus est, figura erit (fig. 5.) Hyperbola triplex cum sex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Asymptotos, quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæc Asymptoti, si terminus $b x^2$ non deest, se mutuò secabunt in tribus Punctis Triangulum $D d^A$ inter se continentes, sin terminus $b x^2$ deest, conver-

gent omnes ad idem punctum. In priori casu TAB. I.

cape $AD = \frac{-b}{2a}$ et $Ad = A^{\Delta} = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac
 junge Dd, D^{Δ} , et erunt Ad, Dd, D^{Δ} , tres
 Asymptoti. In posteriori (*fig. 6.*) duc ordi-
 natam quamvis BC , ordinatæ principali AG
 parallelam, et in eâ utrinque productâ cape
 hinc indè BF , et Bf sibi mutuò æquales, et
 in eâ ratione ad AB , quam habet \sqrt{a} ad 1,
 jungeque AF, Af ; et erunt AG, AF, Af
 tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus
Redundantem, quia numero crurum Hyper-
 bolicorum sectiones conicas superat.

In Hyperbolâ omni redundante, si neque
 terminus $e y$ desit; neque sit $bb - 4ac$ æquale
 $\pm 4ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum; sin
 eorum alterutrum accidit, Curva habebit uni-
 cam Diametrum, et tres si utrumque. Diameter
 autem semper transit per intersectionem dua-
 rum Asymptotôn, et bisecat rectas omnes, quæ
 ad Asymptotos illas utrinque terminantur et
 parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque abscissa
 AB Diameter figuræ quoties terminus $e y$ deest.
 Diametrum verò absolutè dictam hîc et in
 sequentibus in vulgari significato usurpo, nem-
 pe pro abscissâ, quæ passim habet ordinatas binas
 æquales ad idem punctum hinc indè insistentes.

TAB. I.

I V.

Enumeratio Curvarum.

1. *De Hyperbolis novem redundantibus, quæ Diametro destituuntur et tres habent Asymptotos Triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet Diametrum, quærantur æquationis hujus

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$$

radices quatuor seu valores ipsius x . Eæ sunt (fig. 5. &c.) AP , $A\varpi$, $A\pi$, Ap . Erigantur ordinatæ PT , $\varpi\tau$, $\pi 1$, $p t$, et hæ tangent Curvam in punctis totidem T , τ , 1 , et tangendo dabunt limites Curvæ, per quos species ejus innotescet.

Nam, si radices omnes AP , $A\varpi$, $A\pi$, Ap , (fig. 5. 7.) sunt reales, ejusdem signi et inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ) cum Ovali. Hyperbolarum una jacet versùs D , altera versùs d , tertia versùs δ , et Ovalis semper jacet intra Triangulum $D d \delta$, atque etiam inter medios limites 1 et τ , in quibus utique tangitur ab ordinatis $\pi 1$ et $\varpi \tau$. Et hæc est species prima.

Si è radicibus duæ maximæ $A\pi$, Ap , (fig. 8.) vel duæ minimæ AP , $A\varpi$, (fig. 9.) æquantur

inter se, et ejusdem sunt signi cum alteris TAB. I.
 duobus, Ovalis et Hyperbola circumscripta
 sibi invicem junguntur, coeuntibus earum
 Punctis contactûs τ , et t , vel T , et τ , et crura
 Hyperbolæ sese decussando in Ovalem con-
 tinuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ
species est secunda.

Si è radicibus tres maximæ $A\rho$, $A\pi$, $A\varpi$,
 (fig. 10.) vel tres minimæ $A\pi$, $A\varpi$, AP ,
 (fig. 11.) æquantur inter se, Nodus in *Cus-*
pidem acutissimum convertetur. Nam, crura
 duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in Angulo
 contactûs concurrent, et non ultra producen-
 tur. Et hæc est *species tertia.*

Si è radicibus duæ mediæ $A\varpi$ et $A\pi$ (fig. 12.)
 æquantur inter se, Puncta contactûs τ , et t
 coincidunt, et propterea Ovalis interjecta
 in Punctum evanuit, et constat figura ex tri-
 bus Hyperbolis, inscriptâ, circumscriptâ et am-
 bigenâ cum *Puncto* conjugato. Quæ est *spe-*
cies quarta.

Si duæ ex radicibus sunt impossibiles et re-
 liquæ duæ inæquales, et ejusdem signi (nam
 signa contraria habere nequeunt,) *Puræ* ha-
 bebuntur Hyperbolæ tres sine ovali, vel nodo
 vel cuspidem, vel puncto conjugato, et hæ
 Hyperbolæ, vel ad latera trianguli ab Asym-
 ptotis comprehensi, vel ad angulos ejus

TAB. I. jacebunt; et perindè *speciem*, vel *quintam* (fig. 12. 13.), vel *sextam* (fig. 14. 15.) constituent.

TAB. II. Si è radicibus duæ sunt æquales, et alteræ duæ, vel impossibiles sunt (fig. 16. 18.), vel reales (fig. 17. 19.) cum signis, quæ à signis æqualium radicum diversa sunt, Figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis se invicem decussabunt, idque, vel ad verticem Trianguli ab Asymptotis comprehensi (fig. 18. 19.), vel ad ejus basem (fig. 16. 17.) Quæ duæ *species* sunt *septima* et *octava*.

Si deniquè radices omnes sunt impossibiles (fig. 20.), vel si omnes sunt reales, et inæquales (fig. 21.), et earum duæ sunt affirmativæ, et alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppositos duarum Asymptotôn cum Hyperbolâ *Anguineâ* circà Asymptoton tertiam. Quæ *species* est *nona*.

Et hi sunt omnes radicum casus possibles. Nam, si duæ radices sunt æquales inter se, et aliæ duæ sunt etiam inter se æquales, figura evadet sectio conica cum lineâ rectâ.

2. De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantum Diametrum habentibus.

Si Hyperbola redundans habet unicam tantum Diametrum, sit ejus Diameter Abscissa A B, et æquationis hujus

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

quære tres radices seu valores x .

Si radices illæ sunt omnes reales, ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* intrà Triangulum D d^δ (*fig. 22.*) jacente et tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempe circumscriptâ ad angulum D, et inscriptis duabus ad angulos d et δ. Et hæc est *species decima*.

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versùs D (*fig. 23.*) se se decussabunt in formâ *Nodi* propter contactum *Ovalis*. Quæ *species* est *undecima*.

Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit *Cuspidata* sine *Ovali* (*fig. 24.*). Quæ *species* est *duodecima*.

Si radices duæ minores sunt æquales et tertia ejusdem signi, *Ovalis* in Punctum evanuit, (*fig. 25.*) Quæ *species* est *decima-tertia*.

In speciebus quatuor novissimis Hyperbola, quæ jacet versùs D, *Asymptotos* in sinu suo amplectitur, reliquæ duæ in sinu *Asymptotôn* jacent.

TAB. II. Si duæ ex radicibus sunt impossibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ*, sine Ovali, Decussatione, vel Cuspide. Et hujus casûs *species* sunt quatuor: nempe *decima quarta*, si Hyperbola circumscripta jacet versûs D, (*fig. 25.*) et *decima-quinta*, si Hyperbola inscripta jacet versûs D, (*fig. 26.*) et *decima-sexta*, si Hyperbola circumscripta jacet sub basi $d\delta$ Trianguli D $d\delta$, (*fig. 27.*) et *decima-septima*, (*fig. 28*), si Hyperbola inscripta jacet sub eadem basi.

Si duæ radices sunt æquales, et tertia signi diversi, figura erit *Cruciformis*. Nempe, duæ ex tribus Hyperbolis se invicem decussabunt: idque, vel ad verticem Trianguli ab Asymptotis comprehensi, (*fig. 29.*) vel ad ejus basem, (*fig. 30.*) Quæ duæ *species* sunt *decima-octava*, et *decima-nona*.

Si duæ radices sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi diversi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptotôn cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoidalis* autem, vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum Triangulo ab Asymptotis constituto, (*fig. 31.*) vel ad partes contrarias (*fig. 32.*). Et hi duo casus constituunt *speciem vigesimam*, et *vigesimam primam*.

3. *De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.*

T A B.
III.

Hyperbola redundans, quæ habet tres Diametros, constat ex tribus Hyperbolis in sinibus Asymptotôn jacentibus; idque vel ad angulos Trianguli ab Asymptotis comprehensi (fig. 33.), vel ad ejus latera (fig. 34.). Casus prior dat *speciem vigesimam secundam*, et posterior *speciem vigesimam tertiam*.

4. *De Hyperbolis novem redundantibus cum Asymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*

Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuò decussant, vertuntur species quinta et sexta in *vigesimam quartam*; (fig. 6.) septima et octava in *vigesimam quintam*, (fig. 35.) et nona in *vigesimam sextam*, (fig. 36.) ubi anginea non transit per concursum Asymptotôn; et in *vigesimam septimam*, ubi transit per concursum illum, (fig. 37.), quo casu termini *b* ac *d* desunt, et concursus Asymptotôn est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppositis æqualiter distans. Et hæ quatuor species Diametrum non habent.

Vertuntur etiam *species decima quarta*, ac *decima sexta* in *vigesimam octavam* (fig. 38.),

T A B. decima quinta, ac decima septima in *vigesimam nonam* (fig. 39.), decima octava et decima nona in *tricesimam* (fig. 40.); et vigesima cum vigesimâ primâ in *tricesimam primam*, (fig. 41.). Et hæ species unicam habent Diametrum.

Ac denique species vigesima secunda et vigesima tertia vertuntur in *speciem tricesimam secundam*, cujus tres sunt Diametri per cursum Asymptotôn transeuntes (fig. 42.)

Quæ omnes conversiones facillimè intelliguntur faciendo, ut Triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur, donec in punctum evanescat.

5. De Hyperbolis sex defectivis Diametrum non habentibus.

Si in primo æquationum casu terminus ax^2 negativus est, figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton, et duo tantùm crura hyperbolica juxtâ Asymptoton illam in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima, et principalis A G (fig. 43.). Si terminus ey non deest, figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

Si æquationis hujus

$$ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$$

radices omnes $A\pi$, AP , Ap , $A\varpi$, sunt reales, et inæquales, figura erit Hyperbola anguinea Asymptoton flexu contrario amplexa, cum Ovali conjugatâ. Quæ species est tricesima tertia.

T A B.
III.

Si radices duæ mediæ AP , et Ap , (fig. 44.) æquentur inter se, ovalis et anguinea junguntur sese decussantes in formâ nodi. Quæ est species tricesima quarta.

Si tres radices sunt æquales, nodus vertetur in cuspidem acutissimum in vertice Anguineæ (fig. 45.), et hæc est species tricesima quinta.

Si è tribus radicibus ejusdem signi, duæ maximæ, Ap , et $A\varpi$ (fig. 47.) sibi mutuò æquantur, ovalis in Punctum evanuit. Quæ species est tricesima sexta.

Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit anguinea Pura sine ovali, decussatione, cuspidem, vel puncto conjugato. Si anguinea illa non transit per punctum A , (fig. 46.) species est tricesima septima, sin transit per punctum illud A (id quod contingit, ubi termini b ac d desunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipsum ductas, et ad curvam utrinque terminatas, bisecans (fig. 47.). Et hæc est species tricesima octava.

T A B.
I V.

6. De Hyperbolis septem defectivis Diametrum
habentibus.

In altero casu, ubi terminus ey deest, et propterea figura Diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$, radices omnes AT , At , $A\tau$, (fig. 48.) sunt reales, inæquales, et ejusdem signi, figura erit Hyperbola conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ est *species tricesima nona*.

Si duæ radices sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi contrarii, ovalis jacebit ad concavitatem conchoidalis (fig. 49.); estque *species quadragesima*.

Si radices duæ minores AT , At (fig. 50.) sunt æquales, et tertia $A\tau$ est ejusdem signi, ovalis, et conchoidalis jungentur sese decussando in modum *nodi*. Quæ *species est quadragesima prima*.

Si tres radices sunt æquales, nodus mutabitur in *cuspidem* et figura erit *Cissois veterum*, (fig. 51.). Et hæc est *species quadragesima secunda*.

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia est ejusdem signi, conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam (fig. 53.), estque *species quadragesima tertia*.

Si radices duæ sunt æquales, et tertia est

signi contrarii, conchoidalis habebit punctum conjugatum ad concavitatem suam (*fig. 53.*), estque *species quadragesima quarta.*

T A B.
I V.

Si radices duæ sunt impossibiles habebitur conchoidalis *Pura* sine ovali, nodo, cuspede, vel puncto conjugato (*fig. 52 et 53.*) quæ *species est quadragesima quinta.*

7. *De Hyperbolis septem parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo æquationum casu terminus $a x^3$ deest, et terminus $b x$ non deest, figura erit hyperbola parabolica duo habens crura hyperbolica ad unam Asymptoton S A G et duo parabolica in plagam unam et eandem convergentia. Si terminus $e y$ non deest, figura nullam habebit Diametrum; sin deest, habebit unicam. In priori casu species sunt hæc.

Si tres radices A P, A ω , A π (*fig. 54.*) æquationis ejus $b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$ sunt inæquales et ejusdem signi, figura constabit ex *ovalis*, et aliis duabus curvis, quæ partim hyperbolicæ sunt, et partim parabolicæ. Nempe crura parabolica continuò ductu junguntur cruribus hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *species quadragesima sexta.*

Si radices duæ minores sunt æquales, et ter-

T A B. I V. tia est ejusdem signi, ovalis et una curvarum illarum hyperbolo-parabolarum junguntur et se decussant in formam *nodi* (*fig. 55.*) quæ species est *quadragesima septima.*

Si tres radices sunt æquales, nodus ille in cuspidem vertitur (*fig. 56.*) estque species *quadragesima octava.*

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia est ejusdem signi, Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*fig. 57.*) Quæ species est *quadragesima nona.*

Si duæ radices sunt impossibiles, manebunt *Puræ* duæ illæ *Curvæ* hyperbolo-parabolicæ sine ovali, decussatione, cuspidem, vel puncto conjugato; et *speciem quinquagesimam* constituent. (*fig. 57 et 58.*)

Si radices duæ sunt æquales, et tertia est signi contrarii, curvæ illæ hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussando in morem crucis (*fig. 59.*). Estque species *quinquagesima prima.*

Si radices duæ sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi contrarii, figura evadet *Hyperbola* anguinea circà *Asymptoton* A G, (*fig. 60.*) cum *Parabolâ* conjugatâ. Et hæc est species *quinquagesima secunda.*

8. De Hyperbolis quatuor parabolicis
Diametrum habentibus.

T A B.
V.

In altero casu, ubi terminus $e y$ deest, et figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $b x^2 + c x + d = 0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ hyperbolo-parabolicæ à Diametro A B (fig. 61.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ species est quinquagesima tertia.

Si æquationis illius radices duæ sunt reales et æquales, figuræ hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; et speciem quinquagesimam quartam constituunt. (fig. 62.).

Si radices illæ sunt inæquales et ejusdem signi, habetur hyperbola conchoidalis cum parabolâ ex eodem latere Asymptoti. (fig. 63.) Estque species quinquagesima quinta.

Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur conchoidalis cum parabolâ ad alteras partes Asymptoti (fig. 64.). Quæ species est quinquagesima sexta.

9. De quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ.

Si quando, in primo æquationum casu, terminus uterque $a x^3$ et $b x^2$ deest, figura erit hyperbolismus sectionis alicujus conicæ. Hy-

T A B. *perbolismum* figuræ voco, cujus ordinata pro-
dit applicando contentum sub ordinatâ figuræ
V. illius et rectâ datâ ad Abscissam communem.
Hac ratione Linea recta vertitur in hyperbo-
lam conicam, et sectio omnis conica vertitur
in aliquam figurarum, quas hîc hyperbolismos
sectionum conicorum voco. Nam, æquatio
ad figuras, de quibus agimus, nempe

$$x y^2 + e y = c x + d,$$

dat $y = \frac{-e \pm \sqrt{(e^2 + 4 d x + 4 c x^2)}}{2 x}$; quæ gene-

ratur applicando contentum sub ordinatâ sec-
tionis conicæ $\frac{-e \pm \sqrt{(e^2 + 4 d x + 4 c x^2)}}{2 m}$, et

rectâ datâ m ad Curvarum abscissam commu-
nem x . Undè liquet, quòd figura genita hy-
perbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos, vel Pa-
rabolæ; perinde ut terminus $c x$ affirmativus
est, vel negativus, vel nullus.

Hyperbolismus Hyperbolæ tres habet Asym-
ptotos, quarum una est ordinata prima prin-
cipalis $A d$ (*fig. 65.*), alteræ duæ sunt parallelæ
abscissæ $A B$, ab eâdem hinc indè æqualiter
distant. In ordinatâ principali $A d$, cape $A d$,
 $A \delta$, hinc indè æquales quantitati \sqrt{c} ; et per
puncta d , ac δ age $d g$, $\delta \gamma$ Asymptotos abscissæ
 $A B$ parallelas.

Ubi terminus $e y$ non deest, figura nullam.

T A B.
V.

habet Diametrum. In hoc casu, si æquationis hujus $c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$, radices duæ A P, A p sunt reales et inæquales, (nam æquales esse nequeunt, nisi figura sit cônica sectio) figura constabit ex tribus hyperbolis sibi oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, et alteræ duæ jacent extrà. Et hæc est *species quinquagesima septima*.

Si radices illæ duæ sunt impossibiles, habentur hyperbolæ duæ oppositæ extrà Asymptotos parallelas et anguinea hyperbolica intrà easdem. Hæc figura duarum est specierum. Nam, Centrum non habet, ubi terminus d non deest (*fig. 66.*): sed si terminus ille deest, punctum A est ejus Centrum (*fig. 67.*). Prior *species est quinquagesima octava*, posterior *quinquagesima nona*.

Quòd si terminus $e y$ deest, figura constabit ex tribus hyperbolis oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, et alteræ duæ jacent extrà, ut in specie quinquagesimâ septimâ, et præterea Diametrum habet, quæ est abscissa A B (*fig. 68.*). Et hæc est *species sexagesima*.

T A B.

10. De tribus Hyperbolismis Ellipseos.

V.

Hyperbolismus Ellipseos per hanc æquationem definitur $x y^2 + e y = c x + d$, et unicam habet Asymptoton, quæ est ordinata principalis A d (fig. 69.). Si terminus $e y$ non deest, figura est Hyperbola anguinea sine Diametro; atque etiam sine Centro, si terminus d non deest. Quæ species est *sexagesima prima*.

At si terminus d deest, figura habet Centrum sine Diametro, et Centrum ejus est Punctum A (fig. 70.) species verò est *sexagesima secunda*.

Et, si terminus $e y$ deest et terminus d non deest, figura est conchoidalis ad Asymptoton A G (fig. 71.), habetque Diametrum sine centro, et Diameter ejus est abscissa A B. Quæ species est *sexagesima tertia*.

11. De duobus Hyperbolismis Parabolæ.

Hyperbolismus Parabolæ per hanc æquationem definitur $x y^2 + e y = d$, et duas habet Asymptotos, abscissam A B, et ordinatam primam et principalem A G. Hyperbolæ verò in hac figurâ sunt duæ, non in Asymptoton angulis oppositis, sed in angulis qui sunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abscissæ A B, et, vel sine Diametro, si terminus $e y$ habetur (fig. 72.), vel cum Diametro, si terminus ille deest (fig. 73.). Quæ duæ species sunt *sexagesima quarta* et *sexagesima quinta*.

12. De Tridente.

T A B.
V I.

In secundo æquationum casu habebatur æquatio $x y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita, quorum duo sunt hyperbolica circa Asymptoton A G (fig. 74.) in contrarias partes tendentia, et duo parabolica convergentia, et cum prioribus speciem tridentis ferè efformantia. Estque hæc figura parabola illa, per quam CARTESIUS æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur *species sexagesima sexta*.

13. De Parabolis quinque divergentibus.

In tertio casu æquatio erat

$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

et parabolam designat, cujus crura divergunt ab invicem, et in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abscissa A B est ejus Diameter, et species ejus sunt quinque sequentes.

Si æquationis $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$, radices omnes A τ , A T, A t, sunt reales et inæquales, figura est Parabola divergens campaniformis cum *ovali* ad verticem (fig. 75. 76.). Et *species est sexagesima septima*.

Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit, vel *nodata* contingendo ovalem (fig. 77.), vel *punctata*, ob ovalem infinitè parvam (fig. 78.). Quæ duæ *species sunt sexagesima octava*, et *sexagesima nona*.

T A B. VI. Si tres radices sunt æquales, Párabola erit *cuspidata* in vertice (*fig. 80.*) et hæc est parabola *Neiliana*, quæ vulgò *semicubica* dicitur. Et est *species septuagesima*.

Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*fig. 78. 79.*) *speciem septuagesimam primam* constituens.

14. De Parabolâ cubicâ.

In quarto casu æquatio erat

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

et hæc æquatio parabolam designat, quæ crura habet contraria, et *cubica* dici solet (*fig. 81.*). Et sic *species omnino sunt septuaginta duæ*.

V.

Genesis Curvarum per Umbras.

Si in Planum infinitum à puncto lucido illuminatum Umbræ figurarum projiciantur, Umbræ sectionum conicarum semper erunt sectiones conicæ; eæ Curvarum secundi Generis semper erunt Curvæ secundi Generis; eæ Curvarum tertii Generis semper erunt Curvæ tertii Generis, et sic deinceps in infinitum.

Et, quemadmodum circulus, Umbram projiciendo, generat sectiones omnes conicas; sic Parabolæ quinque divergentes Umbris suis

generant et exhibent alias omnes secundi generis Curvas; et sic Curvæ quædam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt, quæ alias omnes eorundem Generum Curvas Umbrae suis à Puncto lucido in Planum projectis formabunt.

T A B.
V I.

De Carvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas secundi Generis à Lineâ rectâ in Punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut, cùm recta per ovalem infinitè parvam transit vel per concursum duarum partium Curvæ se mutuò secantium, vel in cuspidem cocuntium ducitur. Et, si quando rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm Puncto secant, (ut fit in ordinatis Parabolæ *Cartesianæ*, et Parabolæ cubicæ, nec non in rectis abscissæ hyperbolismorum Hyperbolæ, et Parabolæ parallelis) concipiendum est, quòd rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes, sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

T A B.
VI.

V I.

De Curvarum Descriptione Organicâ.

T H E O R. I.

Si (*fig. 82.*) Anguli duo magnitudine dati PAD , PBD , circa polos positione datos A , B , rotentur, et eorum crura AP , BP , concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD , BD concursu suo D describent sectionem conicam per polos A , B , transeuntem: præterquàm ubi Linea illa recta transit per polorum alterutrum A vel B , vel Anguli BAD , ABD simul evanescunt, quibus in casibus punctum D describit Lineam rectam.

T H E O R. II.

Si (*fig. 83.*) crura AP , BP concursu suo P percurrant sectionem conicam per polum alterum A transeuntem, crura duo reliqua AD , BD concursu suo describent Curvam secundi Generis per Polum alterum B transeuntem, et Punctum Duplex habentem in Polo primo A , per quem sectio conica transit: præterquàm ubi Anguli BAD , ABD simul evanescunt, quo casu Punctum D describet aliam sectionem conicam per polum A transeuntem,

T H E O R. I I I.

T A B.
V I.

At, si sectio conica, quam punctum P percurrit transeat per neutrum polorum A, B, (fig. 84.) punctum D describet Curvam secundi, vel tertii generis punctum duplex habentem. Et punctum illud duplex in concursu crurum describentium, A D, B D invenietur, ubi anguli B A P, A B P simul evanescent. Curva autem descripta secundi erit generis, si anguli B A D, A B D simul evanescent, aliàs erit tertii generis, et alia duo habebit puncta duplicia in polis A et B.

*Sectionum Conicarum descriptio per data
quinque puncta.*

Jam sectio conica determinatur ex datis ejus punctis quinque, et per eadem sic describi potest. Dentur (fig. 85.) ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, et trianguli A B C rotentur anguli duo quivis C A B, C B A circa vertex suos A et B; et, ubi crurum A C, B C intersectio C successivè applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum A B et B A in puncta P et Q. Agatur et infinite producat recta P Q, et anguli mobiles ita rotentur, ut intersectio cru-

T A B. rum A B, B A percurrat rectam P Q, et crurum
 V I. reliquorum intersectio C describet propositam sectionem conicam per Theorema primum.

Curvarum secundi generis punctum duplex habentium descriptio per data septem puncta.

Curvæ omnes secundi Generis punctum duplex habentes determinantur ex datis earum punctis septem, quorum unum est punctum illud duplex, et per eadem puncta sic describi possunt. Dentur (*fig. 86.*) Curvæ describendæ puncta quælibet septem A, B, C, D, E, F, G, quorum A est punctum duplex. Jungantur punctum A, et alia duo quævis è punctis, puta B et C; et Trianguli A B C rotetur tum angulus C A B circà verticem suam A, tum angulorum reliquorum alteruter A B C circà verticem suum B. Et, ubi crurum A C, B C concursus C successivè applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G, incidat concursus crurum reliquorum A B, et B A in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor et quintum A describatur sectio conica; et anguli præfati C A B, C B A ita rotentur, ut crurum A B, B A concursus percurrat sectionem illam conicam, et concursus reliquorum crurum A C, B C describet curvam propositam per Theorema secundum.

Si, vice puncti C datur positione recta BC, quæ Curvam describendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident, et vice anguli DAP habebitur linea recta circà polum A rotanda.

Si Punctum Duplex A infinitè distat, debet recta ad plagam puncti illius perpetuò dirigi, et motu parallelo ferri intereà dùm angulus ABC circà polum B rotatur.

Describi etiam possunt hæ Curvæ paulò aliter per Theorema tertium, sed descriptionem simpliciore[m] posuisse sufficit.

Eadem methodo Curvas tertii, quarti, et superiorum Generum describere licet, non omnes quidem, sed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem describi possunt. Nam, Curvam aliquam secundi, vel superioris Generis punctum duplex non habentem commodè describere, Problema est inter difficiliora numerandum.

V I I.

*Constructio Æquationum
per Descriptionem Curvarum.*

Curvarum usus in Geometriâ est, ut per earum intersectiones Problemata solvantur. Proponatur æquatio construenda dimensionum novem.

$$x^9 + b x^7 + c x^6 + d x^5 + e x^4 + f x^3 + g x^2 + h x + k = 0$$

+m

Ubi $b, c, d, \&c.$ significant quantitates quasvis datas signis suis $+$ et $-$ affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, et æquatio prior, scribendo y pro x^3 , evadet

$$y^3 + b x y^2 + c y^2 + d x^2 y + e x y + m y + f x^3 + g x^2 + h x + k = 0.$$

Æquatio ad Curvam aliam secundi generis, ubi m , vel f deesse potest, vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones et intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum $h x$, et k reducatur ad septem dimensiones, Curva altera delendo m , habebit punctum duplex in principio abscissæ, et indè facilè describi potest, ut suprâ.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum $gx^3 + hx + k$ reducatur ad sex dimensiones, Curva altera, delendo f , evadet sectio conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum, æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam et Lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per hyperbolismum Parabolæ cum Diametro. Ut, si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens,

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \frac{gx^6 + hx^7}{+m} + kx^8 + lx^9 = 0;$$

Assumatur æquatio ad hyperbolismum illum $x^2y = 1$, et scribendo y pro $\frac{1}{x^2}$, æquatio construenda vertetur in hanc

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + m + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0,$$

quæ Curvam secundi Generis designat, cuius descriptione Problema solvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hîc deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per Parabolam cubicam et Curvas tertii Generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, et per

eandem Parabolam et Curvas quarti Generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ, tertii, quarti, et superiorum Generum describi semper possunt inveniendæ eorum puncta per Geometriam planam. Ut si constuenda sit æquatio

$$x^{12} + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0,$$

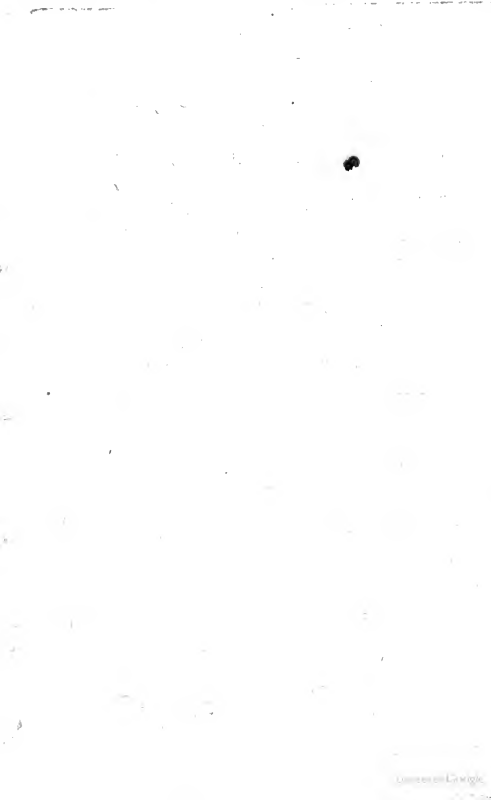
et descripta habeatur Parabola cubica : sit æquatio ad Parabolam illam cubicam $x^3 = y$, et scribendo y pro x^3 , æquatio constuenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{cccc} y^4 + ax^3y^3 + cx^2y^2 + fx^2y + ix^2 = 0 \\ + b & + dx & + gx & + kx \\ & + e & + h & + l \end{array}$$

quæ est æquatio ad Curvam tertii Generis; cujus descriptione Problema solvetur. Describi autem potest hæc Curva inveniendæ ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non nisi ad duas dimensiones ascendit.

F I N I S.

L I N E Æ
TERTII ORDINIS
NEWTONIANÆ;
S I V E
ILLUSTRATIO TRACTATUS D. NEWTONI
DE ENUMERATIONE
LINEARUM TERTII ORDINIS.
CUI SUBJUNGITUR,
SOLUTIO TRIUM PROBLEMATUM
A U T H O R E
Jac. **STIRLING**, è Coll. Ball. *Oxon.*



LINEÆ TERTII ORDINIS NEWTONIANÆ.

DEFINITIONES.

1. *LINEA Geometrica* est cujus abscissæ et ordinatæ correspondentes eandem iuter se ubique obtinent relationem.
2. *Linea rationalis* est cujus abscissæ et ordinatæ relationem obtinent æquatione vulgari algebraicâ designabilem.
3. *Linea irrationalis* est quando ratio illa æquatione istiusmodi exprimi nequit.
4. *Asymptotos* curvæ est Linea simplicissima, sive curva sive recta sit, quæ ad curvæ crus tanto magis continuè accedit quanto magis producitur, tandem cum eo coincidens.
5. *Crura ejusdem generis* sunt quæ pro Asymptotis suis sortiuntur lineas ejusdem speciei.
6. *Hyperbola inscripta* est quæ tota jacet in Asymptotôn angulo: adinstar hyperbolæ conicæ.

7. *Circumscripta* est quæ Asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo complectitur.
8. *Ambigena* est quæ uno crure *inscribitur* et altero *circumscribitur*.
9. *Conchois* est figura habens duos crura ad eandem ejusdem Asymptoti partes jacentia, et in plagas oppositas protensa, cum vertice versus Asymptoton concavo.
10. *Anginea* vero est figura, quando crura jacent ad diversas Asymptoti partes.
11. Figura *Cruciformis* est, quando quatuor ejus crura in uno puncto conveniunt.
12. *Nodata* est, quando duo crura se invicem decussant, *nodum* quasi efficiunt.
13. *Cuspidata* est, quando crura in eorum conjunctione *cuspidem* efficiunt.
14. *Punctata* est quæ *ovalem* habet conjugatam infinite parvam, id est, punctum.
15. *Pura* est quæ *ovali, nodo, cuspidem* et *puncto conjugato* privatur.

Linearum Rationalium Ordines.

Linearum Rationalium obvia est divisio, ab ipsarum naturis desumpta, in simpliciores scilicet et magis compositas pro ratione dimensionum æquationis, quâ relatio inter abscissas et ordinatas definitur; quando quidem æquatio illa simplicissima est in quâ quantitates indeterminatæ sunt pauciorum dimensionum. Quâ ratione generalissima æquatio alicujus ordinis comprehendit omnes lineas ejusdem.

Ergo linea primi ordinis erit recta sola æquatione $y + ax + b = 0$ designata,

Eas secundi ordinis designat

$$y^2 + (ax + b)y + cx^2 + dx + e = 0,$$

Eas tertii

$$y^3 + (ax + b)y^2 + (cx^2 + dx + e)y + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0,$$

Eas quarti

$$y^4 + (ax + b)y^3 + (cx^2 + dx + e)y^2 + (fx^3 + gx^2 + hx + k)y + lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

Eas quinti

$$y^5 + (ax + b)y^4 + (cx^2 + dx + e)y^3 + (fx^3 + gx^2 + hx + k)y^2 + (lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)y + rx^5 + sx^4 + tx^3 + ux^2 + vx + w = 0,$$

et sic proceditur in infinitum.

In hisce æquationibus x est Abscissa, y Ordinata in quovis angulo ad se invicem incli-

nata; a, b, c, d , &c. quantitates datæ signis suis + et - affectæ, quarum una vel plures deesse possunt, modo ex tali defectu, linea non migret in aliam ordinis inferioris.

Hæ æquationes sunt sui ordinis generalissimæ; continent quippe omnes abscissæ et ordinatæ combinationes, ubi earum dimensiones in uno æquationis termino simul sumptæ non superant dimensionem maximam ordinatæ. Etenim dimensio Curvæ pendet ex maximâ dimensione abscissæ et ordinatæ in eodem æquationis termino.

Numerus coefficientium in illis æquationibus.

Per coefficientes hîc intellige quantitates datas a, b, c, d , &c. Harum numerus in prima æquatione est 2, in secundâ 5, in tertiâ 9, in quartâ 14, in quintâ 20, et sic porro. Atque hi numeri sic generantur est $5 = 2 + 3$, $9 = 2 + 3 + 4$, $14 = 2 + 3 + 4 + 5$, $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, &c. Adeoque ex Arithmeticâ summatoriâ universaliter facillè colligitur, quod si sit n numerus dimensionum Curvæ, erit $\frac{n^2 + 3n}{2}$ numerus coefficientium

in æquatione generalissimâ lineas omnes illius ordinis definiente. Hujus usus in sequentibus patebit.

PROP. I. THEOR.

*Omnis Linea Geometrica curvaturâ continuâ
vel in se redit, vel pergit in infinitum.*

Lineam Geometricam motu puncti continuo descriptam hîc considero; omnis enim linea geometrica motu puncti certâ quadam conditione constanti moventis describi potest: quum igitur motus puncti lege immutabili attemperatur, necessario durabit ejus motus in infinitum. Unde via percurta, id est, Linea Geometrica, vel in se redit, vel pergit in infinitum, idque curvaturâ continuâ ob regularem puncti motum. Q. E. D.

Coroll. 1. Superficies solidorum omnium Geometricorum, curvaturâ continuâ, vel in se redeunt, vel pergunt in infinitum. Nam superficies Geometricæ, eodem plane modo linearum motu genitæ concipiendæ sunt, quo Lineæ punctorum motu: adeoque hoc Corollarium et hæc propositio simili prorsus argumentandi genere demonstrantur.

Coroll. 2. Crura infinita alicujus lineæ ductu continuo semper conjunguntur. Nam punctum describens necessario transit ab uno crure ad aliud.

Coroll. 3. Et inde necessario sequitur, quod

crurum infinitorum numerus semper est par: aliàs enim servari nequit motus puncti continuus in infinitum.

Coroll. 4. Omnes rectæ parallelæ secant Curvam aliquam in iisdem numero punctis realibus et imaginariis. Hoc Corollarium facillimè patet ex propositione et Corollaris ejus secundo et tertio.

Coroll. 5. Unde si æquatio quælibet involvat duas indeterminatas, abscissam x et ordinatam y , numerus valorum possibilium et impossibilium ordinatæ y , in omni abscissæ magnitudine idem semper est. Hujus Corollarii beneficio invenire licet numerum radicum æquationis fluxiones involventis, ut et æquationis in quâ quantitates indeterminatæ indeterminatas habent etiam exponentes; ut postea patebit.

Coroll. 6. Ex Lineæ Geometricæ curvaturâ continuâ, sequitur nota illa æquationum proprietas; scilicet quod radicum impossibilium numerus semper est par.

Serierum infinitarum frequens in sequentibus erit usus: visum est igitur aliquid de iisdem præfari, quum nec earum natura, nec methodus eas investigandi, ab aliquo quod sciam; huc usque satis explicata fuerit.

De serierum infinitarum ortu.

D. *Wallisius*, in *Arithmetica infinitorum*, anno 1655 publicatâ, multis exemplis particularibus generaliter tandem invenit, quod si ordinata curvæ sit $x^{\frac{m}{n}}$, erit ejus area $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. Ope ejus regulæ quadravit omnes curvas quarum ordinatas habere potuit in terminis rationalibus expressas. D. *Newtonus* per interpolationem arearum ab ordinatis (per *Wallisii* regulam) deductarum quadravit circum. Et ex datâ ejus areâ in serie infinitâ, per reversum regulæ *Wallisii* invenit ejus ordinatam in serie etiam infinitâ expressam. Et methodum interpolandi prosecutus, Theorema suum invenit pro elevando Binomio ad dignitatem quamvis indeterminatam : ut constat ex Epistolâ ejus ad D. *Oldenburgium* 13 junii anno 1676 missâ. Sed interpolationum methodum missam tandem faciens, operationes speciosas perindè ut Arithmeticas instituere cœpit, atque docuit reducere radices æquationum omnium, primo simplicium deinde affectarum, in series convergentes. Hoc patet ex ejus *Analysi à Barrovia* ad *Collinium* mense julio, anno 1669, missâ. In eadem *Analysi*, serierum ope, qua-

dravit curvas tum *geometricas* tum *mechanicas* ut appellari solent. Et docuit quâ ratione, ex datâ arcâ vel longitudine curvæ inveniri possit Basis vel Ordinata. Sub finem ejusdem *Analyseos*, ope serierum universaliter demonstravit regulam *Wallisii*, methodo novâ quæ alia non erat quàm *fluxionum* methodus.

Cartesius, *Barrovius*, aliique in *Tangentium* methodis, docuerunt invenire rationes primas et ultimas quantitatum *Nascentium* et *Evanescentium*, at non generaliter; et *Wallisius*, uti mox dictum est, ostendit quomodo inveniri possit area ex datâ ordinatâ terminis rationalibus expressa: hæc erant dubia et obscura vestigia *fluxionum* methodi directæ et inversæ. Et impossibile fere erat, absque serierum doctrinâ, hanc methodum ulterius promovere, quam promoverunt præfati docti viri. Unde sanè non video quâ ratione quis possit *fluxionum* methodi inventionem sibi arrogare, et non etiam serierum inventionem.

De naturâ serierum.

Serierum methodus in eo fundatur, ut primo assumatur quantitas radici quæsitiæ æqualis quam proximè, et corrigatur valor assumptus continue: quo pacto habebitur tandem quantitas, quæ à radicis vero valore minus dista-

bit quavis quantitate data. Hoc vero multifariam præstari potest.

Sit series eo citius convergens quo minor est x , scilicet

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

Ponamus esse x admodum parvam, et terminus quilibet posterior erit priore multò minor, atque termini pauci initiales ad verum ipsius y valorem quàm proximè accedent. Quod si sit x infinitè parva, erit accuratè $y = Ax^n$, terminis reliquis hujus termini respectu evanescentibus. In æquatione relationem inter x et y definiente, suppose x etiam infinitè parvam, et termini quidam æquationis evadent reliquis infinitè minores, qui proindè reliquorum maximorum respectu evanescent; è terminis igitur maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus (eodem plane modo quo ex æquatione numerali) extrahe radicem, nam erit illa Ax^n : qui terminus primus propterea dabitur. Per terminos maximos *eiusdem ordinis* intellige eos qui ad se invicem datam habent rationem, et sunt reliquis omnibus infinitè majores. Pone

$$p = Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

terminis nondum inventis, et erit $y = p + Ax^n$, quem ipsius y valorem in æquatione substituendo, obtinebis æquationem novam inde-

terminatas duas x , p involventem. In illa æquatione novâ suppose etiam x infinite parvam, ut sit $p = B x^{n+r}$ accuratè, atque ex terminis maximis ejusdem ordinis tanquàm nihilo æqualibus radix extracta erit $B x^{n+r}$, qui terminus secundus proinde datur. Sit

$$q = C x^{n+2r} + D x^{n+3r} + \&c,$$

undè erit $p = B x^{n+r} + q$: hunc valorem ipsius p substitue in æquatione relationem inter x , p exprimente; et habebis æquationem tertiam quæ ostendit quam inter se x , q obtinent relationem. Ex hac æquatione invenies tertium terminum $C x^{n+2r}$ eodem plane modo quo terminos duos primos ex æquationibus duabus prioribus obtinuisti. Et opus continuando invenire licet terminos seriei sequentes tot quot volueris.

Et si esset series hujusmodi

$$y = A x^n + B x^{n-r} + C x^{n-2r} + D x^{n-3r} + \&c.$$

eo citius convergens quo major est x ; inter operandum supponenda est x infinite magna: atque terminis ordinum inferiorum rejectis è maximis ejusdem ordinis educenda est radix; nam illa est $A x^n$. Ponendo

$$p = B x^{n-r} + C x^{n-2r} + D x^{n-3r} + \&c.$$

adeoque $y = p + A x^n$, habebitur æquatio nova, ex quâ invenire licet terminum seriei secundum, et opus continuando tot quot est animus.

Et .

Et eadem ratione quâ inveniuntur series eo citius convergentes quo major, vel quo minor est x , invenire licet series eo citius convergentes quo propius accedit x ad datam quamvis quantitatem; v. g. si quæratur series eo citius convergens quo propius accedit x ad quantitatem a ; nec suppono x infinitè magnam nec infinitè parvam, sed æqualem ipsi a , et tum quæro valorem ipsius y , nam ille valor est primus terminus seriei. Et quomodo ad libitum procedendum est, ex hactenus traditis satis patet.

Hæc de naturâ serierum et fundamento methodi ad eas perveniendi dicta sufficiant. Processus certè legitimus cuivis in diversis infinitorum ordinibus quam minimè etiam versato necessario patet. Ex ipsâ operatione facilè videre est, has series non dare radices æquationum quæsitas, ni sat celeriter convergant; etenim totus operandi processus in eo fundatur, ut sit x satis parva, vel satis magna, hoc est, ut termini seriei subsequentes sint antecedentibus perpetuò minores. Hinc hallucinantur il qui se aliquid Geometricè etiam accuratum ex seriebus parum convergentibus vel aliquando quidem divergentibus collegisse somniant. Eodemque modo demonstratur divisio et radicum extractio arithmetica. Omnes enim hujusmodi operationes, tam Arithmeticæ quam

Speciosæ eodem innituntur fundamento; scilicet ut serici termini initiales ad quæsitum quam proximè accedant, reliqui vero ut eo magis continuè sint minores quo magis à primo distant. Qui series divergentes adhibent in problematum solutione, idem faciunt ac si divisionem arithmeticam versùs dextram, non versùs sinistram inchoarent. Istius modi enim series quæsitum nunquam dant, sed merè sunt imaginariæ.

Hisce jam expositis, serierum inventio eo usque reducitur, ut inveniantur termini maximi alicujus æquationis ejusdem ordinis; posito quod una indeterminatarum quas involvit æquatio, evadit infinitè magna vel infinitè parva. Quod tamen perficere nemo unquam valuit præter D. *Newtonum* serierum inventorem. Duplici utitur ille methodo, una, Parallelogrammi scilicet, quam descripsit in epistolâ ad D. *Oldenburgium* 24 octob. anno 1676 missâ; quæ quamvis à plurimis qui eam haud intellexerunt, ut methodus mechanica diù neglecta jacuit, est omnium quam quis excogitare potest generalissima et elegantissima. Alteram methodum descripsit D. *Newtonus* in epistolâ ad D. *Wallisium* anno 1692 missâ: quæ, quamvis Geometræ præ priorè huc usque complexi sunt, est particularis so-

lummodo, ut pote cujus ope tantum invenire licet series eò citius convergentes quò minor est x et hoc non adeò generaliter. *Hæc methodus*, ait *NEWTONUS*, *ejusdem est generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superius descriptâ.* Hanc igitur methodum, uti credere par est, *Newtonus* à Parallelogrammo deduxit: utcunque verò se res habet, eam eique similem, pro inveniendis æquationum radicibus in seriebus eo celerius convergentibus quo major est x , in sequentibus à Parallelogrammo demonstrabimus (*).

(*) *Geometra Gallicus De Gua* triangulum parallelogrammo *Newtoniano* suffecit. Quantumvis ingeniosus sit hujus trianguli usus in maximis æquationum terminis inveniendis, fatendum tamen est hunc prorsus mechanicum videri. Quapropter vir *Celeberr.* *Lagrange* methodum simplicem atque elegantissimam et ex analyticis considerationibus duntaxat deductam excogitavit. Quam accuratissimè explanatam reperias, ac simul quicquid ad evolutionem functionum in seriebus attinet, in *Tractatu de Calculo differentiali et Integrali* quem nuperrimè apud eundem *Bibliopolam* edidit *S. F. Lacroix.*

Non adeò mirum ac sentit *Stirling*, serierum methodum fuisse neglectam; nam si illam veluti approximatoriam spectaveris, non sine maximâ cautione adhibenda est; atque ubi fluxionalibus vel differentialibus æquationibus applicatur, non semper suppeditat solutionem tam generalem quam postulat quæstionis status. Indè meritò insectatur *Johannes Bernoulli* *Geometras anglos*, quòd præter necessitatem seriebus utantur.

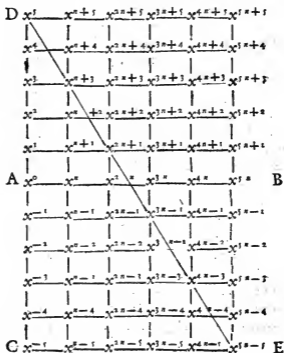
Edit. Annot.

D 2

PROP. II. PROBLEMA.

Si una variarum quas involvit æquatio evadat infinite magna vel parva, oporteat invenire terminos illius æquationis maximos ejusdem ordinis.

Duc rectam D A C eique ad rectos angulos A B: hasce rectas divide in lineolas innumeras æquales, à quarum rectularum extremitatibus erige normales distribuentes spatia angularia D A B, C A B in rectangula innumera æqualia.



Sit x indeterminata ex cujus potestatibus conficienda est series, n index ipsius x in primo termino seriei, adeò ut sit radix quæsita y æqualis $A x^n$ accurate, cum x est infinitè magna vel infinitè parva, prout seriei quæsitiæ natura requirit.

Concipe rectæ CD partes singulas datas esse et unitati æquales; rectæ verò AB partes singulas variables et quantitati n semper æquales. In punctis angularibus æqualium rectangulorum substitue dignitates quantitatum x , x^n regulariter ascendentium et descendentium à puncto A , uti in schemate videre est.

Index cujusvis potestatis ipsius x in rectâ CD positæ æqualis est ejus distantia à puncto A ; affirmativi sunt indices suprâ punctum A , negativi verò qui infrâ locantur. Eodemque modo, quum pars quælibet rectæ AB æqualis sit n , index dignitatis cujusvis ipsius x in rectâ AB positæ dat ejus distantiam à puncto A . Adeòque in punctis angularibus, extrâ rectas AB et CD positis, una pars indicis dat distantiam à rectâ AB , altera pars distantiam à rectâ CD . Et inde totus index simul sumptus æqualis est summæ aut differentia talium distantiarum, prout jacet suprâ vel infrâ rectam AB .

Duc jam rectam quamvis DE transeuntem

per puncta duo quævis angularia x^1 , x^{1-n-1} . Et indices terminorum omnium quos attingit recta illa DE erunt æquidistantes in progressionem arithmeticâ : supponamus hosce indices sibi invicem æquari, hoc est, eorum differentiam esse nihil, et indices omnes alii majores, minores vel æquales erunt horum indicum alterutri, prout jacent suprâ, infrâ vel in ipsâ rectâ DE. Hæc patent ex summis vel differentiis rectarum quibus diximus omnes indices æquari respectivè. Igitur si x sit quantitas infinitè magna, termini quos attingit recta DE, erunt ejusdem ordinis, reliqui verò infinitè majores vel minores terminis attactis prout jacent suprâ vel infrâ rectam DE. Et si x sit quantitas infinitè parva, termini quos attingit DE erunt ejusdem ordinis, reliqui verò erunt terminis attactis infinitè majores vel minores prout jacent infrâ vel suprâ rectam DE. Atque hinc tandem oritur solutio problematis: scilicet quum æquatio aliqua proponitur, pone $y = x^n$, $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, $\ddot{\dot{y}} = x^{n-3}$, &c. neglectis coefficientibus. Terminos æquationis resultantis eodem modo disponere, quo in schemate, cuique locum proprium adscribendo pro ratione indicis: ad horum terminorum sic dispositorum duos vel plures applicetur regula, ita ut omnes reliqui cadant suprâ vel infrâ regulam,

prout quæris seriem ex ascendentibus vel descendentibus ipsius x dignitatibus confectam. Et termini quos attingit regula erunt maximi ejusdem ordinis. Q. E. -I.

Si quando fortè accidit, quod indices ipsius x sint fracti, vel etiam si vis surdi, et nimis operosum foret eos tollere; subdividendæ sunt partes lineæ CD : et inde erigendo normales, in earum cum reliquis concursu disponendæ sunt potestates quarum indices fracti sunt vel surdi. Hujus eadem ac propositionis est demonstratio.

Coroll. 1. Supponamus terminos omnes infrà rectam DE abesse. Et; (per hanc propositionem) termini $x^1, x^{n+3}, x^{2n+1}, x^{3n-1}, x^{4n-3}$ et x^{5n-5} quos attingit regula, erunt maximi ejusdem ordinis, modò supponatur x infinitè parva; et indè eorum indices necessario æquantur; hoc est, $n+3=5, 2n+1=5, 3n-1=5, 4n-3=5$, et $5n-5=5$. Harum quinque æquationum quælibet dabit $n=2$. Æquetur jam numerus 5 indici termini cujusvis aliàs suprà rectam DE positi; sit exempli gratiâ $2n+3=5$, erit $n=1$; sit $4n=5$, erit $n=\frac{5}{4}$; sit $5n+5=5$, erit $n=0$, sit $3n+4=5$, erit $n=\frac{1}{3}$. Vides igitur quod æquando omnes indices numero 5 (qui hîc ponitur index infimæ dignitatis ipsius x) valor ipsius n verus, est

omnium valorum sic procedentium maximus, reliqui tamen vero valore semper procedunt minores.

Coroll. 2. Cum itaque æquatio aliqua proponitur, et quæritur ejus radix in serie eò citius convergente quò minor est x , sit \wedge index infimæ potestatis ipsius x quæ nec per y , \dot{y} , \ddot{y} , $\ddot{\dot{y}}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur; hoc est, sit \wedge index infimæ dignitatis ipsius x in rectâ CD positæ; pone $y = x^n$, $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, &c. Et, hisce valoribus in æquatione substitutis, æquentur omnes indices terminorum sic resultantium indici \wedge , et valor ipsius n omnium maximus indè proveniens, erit index ipsius x in primo termini seriei quæsitæ. Estque hæc altera *D. Newtoni* methodus pro inveniendo indice termini primî.

Coroll. 3. Supponamus jam terminos omnes infra rectam DE jacere, et reliquos abesse, ζ qui nunc est index altissimæ dignitatis earum quæ nec per y , \dot{y} , \ddot{y} , $\ddot{\dot{y}}$, &c. aut earum potestates aliquas multiplicantur, æquatus indici ejusvis termini in rectâ DE positi semper dabit $n = \zeta$, ut antea in Corollario primo. Æquetur autem ζ indici dignitatis alicujus ipsius x infra rectam DE jacentis; sit verbi

gratiâ, $n + 1 = 5$, erit $n = 4$; sit $2n - 3 = 5$, erit $n = 4$; sit $n - 3 = 5$, et erit $n = 8$. Constat ergo quod 2 verus ipsius n valor, est omnium sic provenientium semper minimus. Undè duco regulam sequentem.

Coroll. 4. Si quæritur series eò citiùs convergens quò major est x , sit $y = x^n$, $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, &c. hosce valores in æquatione substitue, et terminorum omnium resultantium indices æquentur ipsi λ (indici altissimæ dignitatis ipsius x , quæ nec per $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dot{\dot{y}}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur) atque valor ipsius n omnium minimus hoc modo inventus, est index ipsius x in primo serici termino.

Methodus hæc pro inveniendò indice primi termini serici ex descendentibus ipsius x dignitatibus confectæ, similis est methodo *D. Newtoni* in Corollario secundo expositæ, pro inveniendò indice termini primi in serie ubi potestates ipsius x perpetuò sunt ascendentes; earum verò neutra haud adeò generalis est, uti ex Parallelogrammo facilè cuivis videre est.

Coroll. 5. Terminos quos attingit recta *D E* appello *primi ordinis terminos*. Moveatur recta

illa D E motu parallelo, et simul tanget terminos $x^4, x^{n+3}, x^{2n}, x^{3n-3}, x^{4n-4}$: hi sunt *termini secundi ordinis*; $x^3, x^{n+1}, x^{2n-1}, x^{3n-3}, x^{4n-4}$ sunt *tertii ordinis termini*; $x^2, x^n, x^{2n-2}, x^{3n-4}$ sunt *quarti ordinis* et sic in infinitum. Terminos enim *ejusdem ordinis* recta D E motu parallelo lata simul tanget. Et sicut radix extracta ex terminis primi ordinis, dat terminum seriei primum, sic radix extracta ex terminis primi et secundi ordinis, dat terminos duos primos; radix extracta ex terminis primi, secundi et tertii ordinis dat terminos tres primos, et sic in infinitum. Undè si in æquatione desint termini ordinum aliquorum intermediorum, termini seriei respectivi habebuntur extrahendo radicem ex terminis æquationis ordinum superiorum. Desint, verbi gratiâ, termini tertii, quarti, quinti et sexti ordinis, et radix extracta ex terminis primi et secundi ordinis, dabit primos sex seriei terminos. Hæc observatio operationi aliquandò compendium subministret: exemplis verò in sequentibus illustrabitur.

Coroll. 6. Ex hæc propositione invenire licet numerum radicum, quas æquatio fluxiones involvens habere potest, et quibus plures habere nequit. Nam termini maximi ejusdem ordinis dant valorem ipsius y , cum x est infinite ma-

magna vel infinitè parva. Et (per Coroll. 5. Prop. 1.) numerus valorum ipsius y in omni Abscissæ x magnitudine idem semper est. Ergo æquationis, quæ dat y , cum x est infinitè parva vel infinitè magna, numerus radicum, æqualis est numero radicum quas æquatio proposita habere potest, et quibus plures habere nequit.

Adeoque etiam innotescit numerus radicum æquationis hujusmodi $y^n + a x^m = a$, ubi indeterminatarum indeterminati sunt coefficients; nam ejusmodi æquatio transmutari potest in fluxionalem.

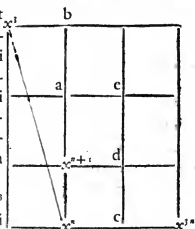
Aliquandò accidit, quod ad inveniendum primum terminum seriei, prodeunt duæ æquationes diversarum dimensionum: in illis casibus dimensio maxima semper dat numerum radicum æquationis propositæ.

Exemplum primum.

Æquationis $y^3 - a^2 y + a x y - x^3 = 0$ extrahendæ sint radices. Ut inveniatur index termini primi seriei quæsitiæ, pone $y = x^n$, eritque $y^3 = x^{3n}$, $x y = x^{n+1}$. Terminis hisce dicto modo dispositis in punctis angularibus Parallelogrammi, video exteriorum tres casus accidere: scilicet, sunt x^3 , x^n ; x^n , x^{3n} , vel x^3 , x^{3n} termini reliquis exteriores. Æquentur

indices, et erit 1.^{mo} $n = 3$, 2.^o $n = 0$ et 3.^o $n = 1$; igitur si quæritur series ex dignitatibus ascendentibus confecta, potest esse 3 vel 0 index ipsius x in primo termino series. Moveatur recta $x^n x^3$ motu parallelo, et ea primò perveniet ad x^{n+1} terminum unicum secundi ordinis, secundò perveniet ad angulum a , tertio ad b , c simul, quartò ad d , quintò ad e et ultimò ad x^{3n} terminum ordinis infimi

Cum igitur desint termini ordinis tertii, quarti, quinti et sexti, inveniuntur primi sex series termini (per Coroll. 5. prop. 2) extrahendo radicem ex terminis
 $-a^2y + axy - x^3$
 primi et secundi



ordinis positus nihilo æqualibus. Hoc verò per divisionem fit, nam si sit æquatio

$$-a^2y + axy - x^3 = 0 \text{ erit } y = \frac{x^3}{-a^2 + ax}$$

adeoque dividendo est

$$y = \frac{-x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \frac{x^6}{a^5} - \frac{x^7}{a^6} - \frac{x^8}{a^7} - \&c.$$

Hi sunt primi sex termini per divisionem

inveni : terminus septimus invenietur esse $\frac{-2x^2}{a^3}$. Hic divisionem inchoavi à termino a^4

quoniam ponitur x admodum parva.

In casu secundo erat $n=0$, pro y itaque in æquatione substitue Ax^0 , vel quod idem est, A , ubi A est quantitas determinanda statim invenienda. Et orietur

$$A^3 - a^2 A + a x A - x^3 = 0.$$

Evanescat jam x et erit $A^3 - a^2 A = 0$, undè est $A = 0$, vel $A = \pm a$: igitur terminus primus potest esse $+a$ vel $-a$: valor 0 spectat ad radicem jam inventam. Pone p æqualem terminis nondum inventis et erit $y = a + p$ quem ipsius y valorem in æquatione substituendo orietur æquatio

$$p^3 + 3ap^2 + (2a^2 + ax)p + a^2x - x^3 = 0$$

indeterminatas x, p , involvens. Ad inveniendum terminum primum valoris radices p , oporectanguli habebimus æquationes

$p^3 + 3ap^2 + 2a^2p = 0$, $2a^2p + a^2x = 0$, æquationis illius radices 0, $-a$, $-2a$, ad seriem quæsitam non pertinent (ut postea explicabitur). Hujus verò radix $-\frac{1}{2}x$ est terminus seriei secundus. Pone igitur $p = q - \frac{1}{2}x$, et orietur $q^3 + (3a - \frac{3}{2}x)q^2 + (2a^2 - 2ax + \frac{3}{4}x^2)q + \frac{1}{4}ax^2 - \frac{2}{3}x^3 = 0$,

ubi æquatio $2 a^2 q + \frac{1}{4} a x^2 = 0$,

dat $q = -\frac{x^2}{8 a}$ proximè, vel $q = r - \frac{x^2}{8 a}$.

Hunc valorem pro q substituo, neglectis terminis q^3 , $-\frac{1}{2} x q^2$, ut et iis in quibus r erit plusquam unius dimensionis, quos nulli usui futuros satis indicabit ipsa operatio, modò unum vel duos fortè serici terminos plures quærere tantum est animus; et exurget

$2 a^2 r - 2 a x r = \frac{7}{8} x^3 - \frac{3 x^4}{64 a}$ proximè, atque

dividendo erit $r = \frac{7 x^3}{16 a^2} + \frac{59 x^4}{128 a^3}$ &c.

Ergo

$y = a + p = a - \frac{1}{2} x + q = a - \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{8 a} + r$

$= a - \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{8 a} + \frac{7 x^3}{16 a^2} + \frac{59 x^4}{128 a^3}$ &c. Et si

pro primo termino usurpassem $-a$, prodisset

$y = -a + \frac{1}{2} x + \frac{x^2}{8 a} + \frac{9 x^3}{16 a^2} + \frac{69 x^4}{128 a^3}$ &c.

Hic notandum est quòd primi tres termini prodeunt rejiciendo x^3 , et ex terminis reliquis $y^3 - a^2 y + a x y = 0$, id est, ex $y^3 - a^2 + a x = 0$ extrahendo radicem.

*Radix unica in serie eò citiùs convergente
quò major est x.*

In tertio casu erat n unitas, pone ergo $y = Ax$, et orietur

$A^3 x^3 - a^2 Ax + a Ax^2 - x^3 = 0$,
termini maximi $A^3 x^3 - x^3$ ejusdem ordinis
positi æquales nihilo dant $A = 1$; ergo est x ,
primus terminus seriei. Pone $y = x + p$, et
resultabit

$p^3 + 3xp^2 + (3x^2 + ax - a^2)p + ax^2 - a^2x = 0$,
ubi termini $3x^2p, ax^2$ positi æquales nihilo
dant $p = \frac{1}{3}a$ ferè, vel $p = q - \frac{1}{3}a$: Hunc
ipsius p valorem substituendo, resultabit æ-
quatio

$q^3 + (3x - a)q^2 + (3x^2 - ax - \frac{1}{3}a^2)q - a^2x + a^3 = 0$,
ubi termini $3qx^2, -a^2x$ dant $\frac{a^2}{3x}$ pro ter-

mino tertio. Pone $q = r + \frac{a^2}{3x}$, et illum va-
lorem substituendo, neglectis terminis nulli
usui futuris, habebis

$(3x^2 - ax)r = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a^4}{9x}$ ferè, undè

$r = \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3}$ &c. adeòque est

$y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3}$ &c.

Exemplum secundum.

In hoc exemplo indices reperiuntur ope
Cor. 4. prop. 2.

Ex æquatione $x^3 \dot{y} + a y \dot{x}x + a^2 \dot{x}x - 2 a^3 \dot{x} = 0$
extrahenda sit radix y in serie ubi indices ipsius
 x perpetuò magis descendunt. Fluat x unifor-
miter, et sit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet
 $x^3 \dot{y} + a x y + a^2 x - 2 a^3 = 0$. Pone $y = A x^n$
erit $\dot{y} = n A x^{n-1}$, atque proveniet æquatio
 $n A x^{n+2} + a A x^{n+1} + a^2 x - 2 a^3 = 0$. Ter-
minus jam altissimæ dignitatis in quo nec \dot{y}
nec y reperitur est $a^2 x$, ubi index ipsius x est
unitas : æquentur igitur indices terminorum
reliquorum unitati, eritque 1.º $n + 2 = 1$,
undè $n = -1$; 2.º erit $n + 1 = 1$, undè $n = 0$,
quorum valorum minimus -1 , est index ipsius
 x in primo termino seriei, et termini $n A x^{n+2}$,
 $a^2 x$ vel $- A x$, $+ a^2 x$ positi æquales nihilo
dant $A = a^2$, undè est $\frac{a^2}{x}$ primus terminus
seriei.

Operatio

Operatio secunda.

Pro terminis reliquis pone p , et erit
 $y = p + a^2 x^{-1}$, $\dot{y} = \dot{p} - a^2 x^{-2}$, undè orietur
 $x^2 \dot{p} + a x p - a^2 = 0$: ubi p , \dot{p} , vices sub-
 cunt ipsarum y , \dot{y} in æquatione primâ. Sit
 $p = A x^n$, $\dot{p} = n A x^{n-1}$; et prodibit
 $n A x^{n+1} + a A x^{n+1} - a^2 = 0$;

terminus unicus in quo nec p neque \dot{p} repe-
 ritur est a^2 , ubi index ipsius x est 0; sit igitur
 $n + 2 = 0$, et erit $n = -2$; sit $n + 1 = 0$,
 et erit $n = -1$; quorum numerorum mini-
 mus -2 est index ipsius x in secundo termino:
 et termini $n A x^{n+2}$, $-a^2$ positi æquales nihilo,
 dant $A = \frac{1}{n} a^2 x^{-n-2} = -\frac{1}{2} a^2$; ergo terminus
 secundus est $-\frac{a^2}{2x^2}$.

Operatio tertia.

Pone $p = q - \frac{1}{2} a^2 x^{-2}$, erit $\dot{p} = \dot{q} + a^2 x^{-3}$,
 quos valores substituendo, orietur æquatio
 $x^2 \dot{q} + a x q - \frac{1}{2} a^2 x^{-1} = 0$. Pone $q = A x^n$,
 $\dot{q} = n A x^{n-1}$, et exurget
 $n A x^{n+2} + a A x^{n+2} - \frac{1}{2} a^2 x^{-1} = 0$.

Terminus unicus in quo nec q neque \dot{q} repe-
 E.

ritur, est $-\frac{1}{2} a^4 x^{-1}$, ubi index ipsius x est -1 ; jam ponendo $n+2=-1$, erit $n=-3$, et ponendo $n+1=-1$, erit $n=-2$, quorum minimus -3 est index quem quærimus, et termini $n A x^{n+2}$, $\frac{1}{2} a^4 x^{-1}$, (quorum indices inter se æquati dant verum ipsius n valorem) positi æquales nihilo dant $A=-\frac{1}{6} a^4$ et inde terminus tertius est $-\frac{a^4}{6 x^3}$.

Operatio quarta.

Sic $q=r-\frac{1}{2} a^4 x^{-3}$, $\dot{q}=\dot{r}+\frac{1}{2} a^4 x^{-4}$, et evadet æquatio $x^3 \dot{r} + a x r - \frac{1}{2} a^4 x^{-2} = 0$, ex quâ æquatione invenies terminum quartum esse $-\frac{a^5}{24 x^4}$, est igitur

$$y = \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2 x^2} - \frac{a^4}{6 x^3} - \frac{a^5}{24 x^4} - \&c.$$

Hoc est,

$$y = \frac{a^2}{1 \cdot x} - \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot x^2} - \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3} - \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^4} - \frac{a^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot x^5}$$

Methodus hæc sigillatim inveniendi terminos est admodum generalis, at plerumque nimis operosa. Est autem alia methodus hasce radices extrahendi, quæ consistit in assumptione seriei universalis hujusmodi

$$y = A x^n + B x^{n+r} + C x^{n+2r} + D x^{n+3r} + \&c.$$

Et indè determinando exponentes n, r , et coefficientes $A, B, C, D, \&c.$ Hujus methodi, longo tempore postquam *D. Newtono* innotuit, in *Actis Eruditorum Lipsiæ D. Leibnitius*, suo etiam nomine edidit exemplum unum aut alterum in casibus facilioribus, ubi tantum docuit coefficientium inventionem; at in indicum non in coefficientium inventionem jacebat difficultas. Ideoque *D. Taylor* in *Prop. 9. Methodi incrementorum*, priusquam coefficientes determinat, formam seriei invenire aggreditur. Estque ut sequitur.

Inveniatur (per *Prop. 2.* vel ejus *Coroll.*) index termini primi, vocetur is n , in æquatione pro $y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\dot{y}}, \&c.$ scribe $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \&c.$ respectivè, adè ut termini resultantes componantur omnes ex x et datis quantitibus: sit r maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, et forma seriei erit hæc

$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$
Erit verò r negativa aut affirmativa, prout quæris seriem ex dignitatibus ipsius x descendentibus aut ascendentibus confectam.

Exemplum tertium.

Æquationis $y^3 + a x y - x^3 = 0$, queratur
radix cum x est admodum magna. Invenio
(per *Prop.* 2.) unitatem esse indicem ipsius x
in primo termino series : pone igitur $y = x$;
et æquatio evadet $x^3 + a x^2 - x^3 = 0$. Horum
indicum 2, 3, 3 maximus communis divisor
est unitas, ergo series formæ erit

$y = A x + B + C x^{-1} + D x^{-2} + E x^{-3} + \&c.$
sequitur operatio.

$$\begin{array}{r}
 y^3 = \left. \begin{array}{l} A^3 x^3 + 3 A^2 B x^2 + 3 A B^2 x + B^3 \\ + 3 A^2 E x + 6 A B D + 3 A C^2 + 3 B^2 C \end{array} \right\} x^3 + \&c. \\
 - x^3 = - x^3 \\
 + a x y = \begin{array}{l} * + a A x^2 + a B x + a C x^0 \\ + a D x^{-1} + \&c. \end{array}
 \end{array}$$

Comparando coefficients terminorum ho-
mologorum, erit $A^3 = 1$, undè $A = 1$.
 $3 A^2 B + a A = 0$, undè $B = -\frac{1}{3} a$.
 $3 A^2 C + 3 A B^2 + a B = 0$, undè $C = 0$.
 $3 A^2 D + B^3 = 0$, undè $D = \frac{1}{27} a^3$.
 $3 A^2 E + 6 A B D + a D = 0$, undè $E = \frac{1}{243} a^4 \&c.$

Ergo $y = x - \frac{1}{3} a + \frac{a^3}{81 x^2} + \frac{a^4}{243 x^3} + \&c.$

Exemplum quartum.

Ex æquatione

$x^3 y^2 - 3 x^2 x y + 2 x x^2 - a x y^2 + a^2 x^2 = 0$,
extrahenda sit radix y in serie cò citiùs con-
vergente quò major est x . Invenio formam
seriei fore,

$$y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} + \&c.$$

Fluat x uniformiter, existente $x = 1$, ut in
casibus hujusmodi vulgò fit; et evadet æqua-
tio $y^2 - 3x^2 y + 2x^2 - axy^2 + a^2 = 0$. Se-
quitur operatio.

$$\begin{array}{r|l}
 y^2 = & A^2 x^2 + 2 ABx + 2 AC \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} x^0 + 2 AD \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} x^{-1} \\
 & + 2 AE \left. \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \right\} x^{-2} + \&c. \\
 -3x^2 y = & -3 Ax^2 \quad * + 3 Cx^0 \quad * + 6 Dx^{-1} \\
 & + 9 Ex^{-2} + \&c. \\
 + 2x^2 = & + 2x^2 \\
 -axy^2 = & * - a A^2 x \quad * - 2 a AC x^{-1} \\
 & - 4 a AD x^{-2} - \&c. \\
 + a^2 = & * \quad * + a^2 x^0 = (
 \end{array}$$

Ex comparatione coefficientium invenio

$$\begin{array}{l}
 A = 1, B = \frac{1}{2}a, C = -\frac{1}{4}a^2, D = -\frac{1}{32}a^3, E = -\frac{1}{312}a^4, \&c. \\
 A = 2, B = a, C = -\frac{1}{7}a^2, D = -\frac{1}{33}a^3, E = -\frac{1}{331}a^4, \&c.
 \end{array}$$

$$\text{Ergo } y = \begin{cases} x + \frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4x} - \frac{a^3}{32x^2} - \frac{5a^4}{352x^3} \&c. \\ 2x + a - \frac{2a^2}{7x} - \frac{2a^3}{35x^2} - \frac{104a^4}{3185x^3} \&c. \end{cases}$$

Radices ejusdem æquationis cum x est valdè parva.

Invenietur forma seriei hæc,

$$y = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^1 + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + Ex^{\frac{5}{2}} + \&c.$$

Sequitur operatio.

$$\begin{array}{l} +aa = +aa \\ -axy^2 = \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{4}aA^2 - aABx^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}aAC \end{array} \right\} x^{-2} - 2aAD \left. \begin{array}{l} -aBB \end{array} \right\} x^{-\frac{3}{2}} \\ \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2}aAE \\ -4aBD \\ -\frac{1}{4}aCC \end{array} \right\} x^2 - \&c. \\ +yy = \quad \quad \quad * \quad \quad * \quad \quad A^2x + 2ABx^{\frac{1}{2}} \\ \quad \quad \quad \left. \begin{array}{l} +2AC \\ +BB \end{array} \right\} x^2 + \&c. \\ -3x^2y = \quad \quad \quad * \quad \quad * \quad \quad * \quad \quad -\frac{1}{2}Ax^{\frac{3}{2}} \\ \quad \quad \quad -3Bx^2 - \&c. \\ +2x^3 = \quad \quad \quad * \quad 2x^3 \end{array}$$

$$\text{Undè } \begin{cases} A = +2\sqrt{a}, B = 0, C = +\frac{4\sqrt{a}}{3a}, \\ D = -\frac{3}{4a}, E = +\frac{2\sqrt{a}}{3aa}, \&c. \\ A = -2\sqrt{a}, B = 0, C = -\frac{4\sqrt{a}}{3a}, \\ D = -\frac{3}{4a}, E = -\frac{2\sqrt{a}}{3aa}, \&c. \end{cases}$$

Ergo

$$y = \begin{cases} +2\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \frac{3x^2}{4a} + \frac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} & \&c. \\ -2\sqrt{ax} - \frac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \frac{3x^2}{4a} - \frac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} & \&c. \end{cases}$$

Sed ut verum quod est confiteamur, hæc methodus *D. Taylor* inveniendi formam serici non est generalis. Imo impossibile est universaliter determinare formam serici ex datâ formâ æquationis; pendet enim forma serici tam ex coefficientibus quam ex exponentibus indeterminatarum in æquatione. Sint enim duæ æquationes

$$y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 + x^2y = 0$$

$$y^3 - ay^2 + a^2y - a^3 + x^2y = 0$$

eædem omninò quoad formam, in priore est

$$y = a - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{3a^{\frac{2}{3}}} \&c. \text{ in posteriore est}$$

$$y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2a^3} \&c. \text{ Et juxtà regulam}$$

D. Taylor, utraque series habere debet eandem formam, quam habet posterior. Fallit dicta regula quotiescunque coincidunt duo vel plures valores termini primi serici: hoc est, quandò ordinata prima tangit curvam vel transit per punctum ejus duplex: vel quandò

ordinata ad distantiam infinitam transit per plura curvæ puncta infinitè propinqua ad se invicem. Inveni autem sequentem regulam pro inveniendâ formâ seriei quantum hactenùs constitit nunquam fallere, sed illam esse ubique veram affirmare non audeo, proptereà quod in eam casu tantùm incidi, (observando scilicet plurimas series diversas et ejus demonstrationem postea frustrà quæsivi.

Methodus determinandi formam seriei.

Inveniatur index primi termini, vocetur is n , in æquatione pro y, \dot{y}, \ddot{y} , &c. scribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2} &c. respectivè, adè ut termini resultantes componantur ex x et datis quantitativibus: sit m maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, p numerus valorum primi termini qui inter se æquantur, et $r = \frac{m}{p}$, atque forma seriei hæc erit

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + \&c.$$

coincidit hæc regula cum regulâ *D. Taylor* quando p est unitas, hoc est, quando primus terminus non habet plures valores æquales (*).

(*) Regula hæc in quam casu tantùm incidit *STIRLING*, haud generalis est. Fallit v. g. si applicetur ad hoc exemplum: $x^2 y^3 + 3ax^2 y^2 + 3a^2 x^2 y + a^3 x^2 - a^3 xy - a^4 x + a^5 = 0$

Exemplum quintum.

Ex æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$,
 extrahenda sit radix y in serie co citiùs con-
 vergente quo major est x . Invenies ope rec-
 tanguli primum terminum esse x , quem scribe
 pro y et æquatio evadet $x^3 - 2x^3 + x^3 - a^3 = 0$.
 Indices terminorum sunt 3, 3, 3, 0, quorum
 maximus communis divisor est 3, et æquatio
 $y^3 - xy^2 + x^2y = 0$ quæ dat primum termi-
 num habet duas radices inter se æquales; igitur
 est $m = 3$, $p = 2$, et $\frac{m}{p} = \frac{3}{2} = r$, undè

nam pro exponente primi termini seriæ descendenti quâ
 exprimitur y , invenietur 0. Igitur substituendo Ax^r loco y ,
 atque ponendo $n = 0$, exponentes omnium terminorum
 sunt numeri sequentes 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, quorum
 maximus communis divisor est 1: ac coefficienti primi termini
 datur æquatione $A^3 + 3aA^2 + 3a^2A + a^3 = 0$ et tres
 valores æquales habet. Secundùm autem regulam prædicam
 prodiret $r = \frac{m}{p} = \frac{1}{3}$; proposita tamen æquatio præbet has
 tres series descendentes:

$$y = a + a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^2x^{-1} - \frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}a^3x^{-2} + \&c.$$

$$y = a - a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^2x^{-1} + \frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}a^3x^{-2} - \&c.$$

$$y = a + a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}} + a^3x^{-2} + 3a^4x^{-3} + 10a^5x^{-4} + \&c.$$

à lege antea repertâ prorsus aberrantes. *Editoris Annotatio.*

forma seriei hæc est

$$y = Ax + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-2} + Dx^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$

Estque operatio ut sequitur

$$\begin{array}{l}
 y^3 = \left. \begin{array}{l} A^3 x^3 + 3 A^2 B x^{\frac{5}{2}} + 3 A^2 C \\ + 3 A B^2 \end{array} \right\} x^0 + \left. \begin{array}{l} + 3 A^2 D \\ + 6 A B C \\ + B^3 \end{array} \right\} x^{-\frac{3}{2}} \\
 + \left. \begin{array}{l} + 3 A^2 E \\ + 6 A B D \\ + 3 A C^2 \\ + 3 B^2 C \end{array} \right\} x^{-3} + \&c. \\
 - 2xy^2 = \left. \begin{array}{l} - 2 A^2 x^2 - 4 A B x^{\frac{3}{2}} - 4 A C \\ - 2 B^2 \end{array} \right\} x^0 + \left. \begin{array}{l} - 4 A D \\ - 4 B C \end{array} \right\} x^{-\frac{3}{2}} \\
 - \left. \begin{array}{l} - 4 A E \\ - 4 B D \\ - 2 C C \end{array} \right\} x^{-3} - \&c. \\
 + x^2 y = A x^3 + B x^{\frac{5}{2}} + C x^0 + D x^{-\frac{3}{2}} \\
 + E x^{-1} + \&c. \\
 - a^3 = - a^3 x^0
 \end{array}$$

Primò igitur habemus æquationem,
 $A^3 - 2 A^2 + A = 0$, undè est $A = +1$, $A = +1$,
 et $A = 0$. Secundò est $3 A^2 B - 4 A B + B = 0$,
 vel $3 B - 4 B + B = 0$, sed indè nihil
 colligitur. Tertiò est

$3 A^2 C + 3 A B^2 - 4 A C - 2 B^2 + C - a^3 = 0$,
 vel $3 A B^2 - 2 B^2 - a^3 = 0$, undè est $B = \pm a^{\frac{2}{3}}$,
 quartò est

$$3 A^2 D + 6 A B C + B^3 - 4 A D - 4 B C + D = 0,$$

id est, $6ABC + B^3 - 4BC^2 = 0$, ergo
 est $C = -\frac{a^3}{2}$, et quinto invenietur $D = \frac{7}{4}a^{\frac{3}{2}}$
 quando pro B scribitur $+a^{\frac{3}{2}}$, sed erit $= -\frac{7}{4}a^{\frac{3}{2}}$,
 quandò pro B scribitur $-a^{\frac{3}{2}}$. Adcoque est
 radix

$$y = \begin{cases} x + \frac{a^3}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2} + \frac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \&c. \\ x - \frac{a^3}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \&c. \end{cases}$$

Hic in determinatione coefficientium observandum est quod ex secundâ æquatione $3A^2B - 4AB^2 + B^3 = 0$ terminus secundus B non reperiebatur. Idem semper notandum est quotiescumque terminus primus habet plures valores inter se æquales. Nam si termini primi omnes valores sunt inter se diversi, terminus secundus et reliqui omnes in infinitum habebunt nisi unicum valorem et per divisionem semper prodibunt. At si terminus primus habet plures valores inter se æquales, tot diversos valores necessariò habebit terminus secundus; qui itaque per divisionem inveniri nequit, sed radix erit æquationis tot dimensionum quot ipse habet valores. Undè in comparatione coefficientium secundus terminus B ex æqua-

tione secundâ non semper invenitur : sed ponendo coefficientes terminorum homologorum æquales nihilo , membra omnia se mutuò semper destruent usque dùm pervenietur ad terminum in cujus coefficiente reperitur terminus secundus tot dimensionum quot ipse habet valores. Sed hæc omnia experienciâ multò melius quàm verbis patebunt.

Considerando curvarum tangentes , curvaturam , variationem curvaturæ , variationem variationis , &c. quæ determinari solent fluxionum ope , determinari etiam posse ope terminorum seriei , ut innuit *D. Newtonus* ad Prop. 10. Lib. 2. *Principiorum* ; statim cognovi incrementa prima , secunda , tertia , &c. relationem quandam habere ad seriei terminos respectivos , adeoque terminos illos determinari ex fluxionibus. Ideò quærebam relationem illam et tandem inveni ut sequitur.

PROP. III. THEOR.

Sit

$$y = A + Bx' + Cx'' + Dx''' + Ex^{(4)} + \&c.$$

$$\text{erit } B = \frac{\dot{y}}{1.1x}, C = \frac{\ddot{y}}{1.2.r^2x^2}, D = \frac{\ddot{\dot{y}}}{1.2.3.r^3x^3},$$

$$E = \frac{\ddot{\dot{\dot{y}}}}{1.2.3.4.r^4x^4}, \&c.$$

adeoque est

$$y = A + \frac{xy}{1 \cdot r \dot{x}} + \frac{x^2 \ddot{y}}{1 \cdot 2 \cdot r^2 \dot{x}^2} + \frac{x^3 \dddot{y}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3 \dot{x}^3} + \&c.$$

Demonstratio.

Fluat x uniformiter, et sit ejus fluxio
 $r x^{r-1} \dot{x} = 1$, vel $\dot{x} = \frac{1}{r} x^{1-r}$. Et erit

$$\dot{y} = r B x^{r-1} \dot{x} + 2 r C x^{2r-1} \dot{x} + 3 r D x^{3r-1} \dot{x} + 4 r E x^{4r-1} \dot{x} + \&c. \text{ ubi si pro } \dot{x} \text{ ponas}$$

ejus valorem $\frac{1}{r} x^{1-r}$ erit

$$\dot{y} = B + 2 C x^r + 3 D x^{2r} + 4 E x^{3r} + \&c.$$

Et indè

$$\ddot{y} = 2 r C x^{r-1} \dot{x} + 6 r D x^{2r-1} \dot{x} + 12 r E x^{3r-1} \dot{x} + \&c.$$

vel ponendo pro \dot{x} , $\frac{1}{r} x^{1-r}$

$$\ddot{y} = 2 C + 6 D x^r + 12 E x^{2r} + \&c.$$

$$\text{unde } \dot{\dot{y}} = 6 r D x^{r-1} \dot{x} + 24 r E x^{2r-1} \dot{x} + \&c.$$

$$\text{id est, } \dot{\dot{y}} = 6 D + 24 E x^r + \&c. \text{ adeoque}$$

$$\dot{\dot{\dot{y}}} = 24 r E x^{r-1} \dot{x} + \&c. = 24 E + \&c.$$

Jam sit x infinitè magna vel infinitè parva,
 prout r est numerus negativus aut affirmativus,

et erit accurate

$$\dot{y} = B, \ddot{y} = 2C, \dot{\dot{y}} = 6D, \ddot{\dot{y}} = 24E, \&c.$$

ergo vicissim est

$$B = \dot{y}, C = \frac{1}{2} \ddot{y}, D = \frac{1}{6} \dot{\dot{y}}, E = \frac{1}{24} \ddot{\dot{y}}, \&c.$$

Hisce valoribus ipsorum $B, C, D, E, \&c.$
substitutis, orietur

$$y = A + x \dot{y} + \frac{1}{2} x^2 \ddot{y} + \frac{1}{6} x^3 \dot{\dot{y}} + \frac{1}{24} x^4 \ddot{\dot{y}} + \&c.$$

Sed erat $\dot{x} = \frac{1}{r} x^{1-r}$, ideòque est $x = \frac{x}{rx}$ quem

ipsius x valorem substitue ut termini evadant
homogenei, et prodibit

$$y = A + \frac{x \dot{y}}{1 \cdot r x} + \frac{x^2 \ddot{y}}{1 \cdot 2 \cdot r^2 x^2} + \frac{x^3 \dot{\dot{y}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3 x^3} + \frac{x^4 \ddot{\dot{y}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^4 x^4} + \&c.$$

Q. E. D.

Coroll. Sit

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

id est

$$y = x^n (A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + \&c.)$$

pone $y = v x^n$, et erit

$$v = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + \&c.$$

Undè per hanc propositionem est

$$y = A + \frac{x \dot{v}}{1 \cdot r x} + \frac{x^2 \ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot r^2 x^2} + \frac{x^3 \dot{\dot{v}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3 x^3} + \&c.$$

Ergo est

$$y = x^r \left(A + \frac{x \dot{v}}{1 \cdot r \dot{x}} + \frac{x^2 \ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot r^2 \dot{x}^2} + \frac{x^3 \dddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r^3 \dot{x}^3} + \&c. \right)$$

Ut habeantur fluxiones ipsius v , pro y in æquatione substitue $v x^r$, et orietur æquatio nova relationem inter x et v definiens, ex quâ invenies fluxiones illas.

Exemplum primum.

Ex æquatione $y^4 - a^3 y = a x^3 - a^3 x$ extrahenda sit radix y . Invenio formam seriei fore $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ adeoque est $r = 1$.

Et ideò fluit x uniformiter, undè per methodum fluxionum directam est

$$4y^3 \dot{y} - a^3 \dot{y} = 3ax^2 - a^3,$$

$$4y^3 \ddot{y} - a^3 \ddot{y} = 6ax - 12y^2 \dot{y}^2,$$

$$4y^3 \dddot{y} - a^3 \dddot{y} = 6a - 24y \dot{y}^3 - 36y^2 \dot{y} \ddot{y}, \&c.$$

undè $\dot{y} = \frac{3ax^2 - a^3}{4y^3 - a^3}$, ubi pro x scribe 0,

et pro y , a ejus valorem cum x est 0, et

$$\text{erit } \dot{y} = \frac{-a^3}{4a^3 - a^3} = -\frac{1}{3};$$

$$\ddot{y} = \frac{6ax - 12y^2 \dot{y}^2}{4y^3 - a^3} = \frac{-12 \times a^2 \times \frac{1}{9}}{3a^2} = \frac{-4}{9a};$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{6a - 24y\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}}{4y^3 - a^3} = \\ &= \frac{6a + \frac{24}{27}a - \frac{36 \cdot 4a}{27}}{3a^3} = \frac{14}{27a^2}. \end{aligned}$$

In serie generali hosce valores substitue; unitatem pro r et a pro A , atque proveniet

$$y = a - \frac{1}{3}x - \frac{2x^2}{9a} + \frac{7x^3}{81a^2} \&c.$$

Exemplum secundum.

Æquationis $y^3 + a^2y + x^2y - 2a^3 = 0$; quærat^rur radix y . Invenio formam seriei esse $A + Bx^2 + Cx^4 + \&c.$ igitur est $r=2$, et x^2 fluit uniformiter, id est, $2x\dot{x} = 1$, $\dot{x} = \frac{1}{2x}$.

Capiendo fluxiones erit

$$3y^2\dot{y} + a^2\dot{y} + x^2\dot{y} = -2x\dot{x}y = -y,$$

$$3y^2\ddot{y} + a^2\ddot{y} + x^2\ddot{y} = -2\dot{y} - 6y\dot{y}^2,$$

$$3y^2\dot{y}^2 + a^2\dot{y}^2 + x^2\dot{y}^2 = -3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3.$$

$$\text{Undè } \dot{y} = \frac{-y}{3y^2 + a^2}, \text{ neglecto termino } x^2\dot{y},$$

quoniam supponitur x evanescere; pro y pone a ejus valorem cum x est 0 , et erit

$$\dot{y} = -\frac{1}{4a},$$

$$\ddot{y} = \frac{-2\dot{y} - 6y\dot{y}^2}{3y^2 + a^2} = \frac{+\frac{2}{4a} - 6a \times \frac{1}{16a^2}}{4a^2} = \frac{1}{32a^3},$$

$$\dot{\ddot{y}} = \frac{-3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3}{3y^2 + a^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3}{32a^3} - 18a \times \frac{1}{4a} \times \frac{1}{32a^3} + \frac{6}{64a^3}}{4a^2} = \frac{-9}{256a^3}$$

In serie generali pro A substitue a , et a pro r ,
atque proveniet

$$y = a - \frac{x^2}{4a} + \frac{x^4}{64a^3} - \frac{3x^6}{512a^5} \&c.$$

Exemplum tertium.

Elevandum sit binomium $a+x$ ad potestatem
indeterminatam cujus index est n . Pone
 $y = (a+x)^n$; undè cum est $x=0$ evadit $y=a^n$,
et indè in serie generali est $A = a^n$. Forma
seriei hæc est $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$

ergo $r = \dot{x} = 1$. Capiendo fluxiones erit

$$a\dot{y} + x\dot{y} = ny,$$

$$a\ddot{y} + x\ddot{y} = (n-1)\dot{y},$$

$$a\dot{\ddot{y}} + x\dot{\ddot{y}} = (n-2)\ddot{y},$$

$$a\ddot{\ddot{y}} + x\ddot{\ddot{y}} = (n-3)\dot{\ddot{y}}, \&c.$$

Evanescat x , et erit

$$\dot{y} = n a^{n-1},$$

$$\ddot{y} = n (n-1) a^{n-2},$$

$$\ddot{\ddot{y}} = n (n-1) (n-2) a^{n-3},$$

$$\ddot{\ddot{\ddot{y}}} = n (n-1) (n-2) (n-3) a^{n-4}, \text{ \&c.}$$

In serie generali hosce valores substitue a^n pro A et unitatem pro r atque prodibit

$$y = (a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} a^{n-2} x^2 + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} a^{n-3} x^3 \text{ \&c.}$$

Hoc modo patet quantâ facilitate demonstratur Theorema *D. Newtoni*.

Exemplum quartum.

Ex dato arcu EC (*fig. 1.*) queratur ejus cosinus BC . Sit $EC = x$, $BC = y$, $Cc = \dot{x}$, $DC = \dot{y}$; erit $AB = \sqrt{1-y^2}$, existente radio $AE = 1$. Propter similia triangula ABC , CDc , $AC : AB :: Cc : CD$, id est, $1 : \sqrt{1-y^2} :: \dot{x} : \dot{y}$, undè erit $y^2 = \dot{x}^2 - x^2 y^2$. Forma seriei hæc est

$$A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{\&c.}$$

quæ continetur in hæc formâ,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{\&c.}$$

igitur potest x vel x^2 fluere uniformiter qu. u. n.

quærentur fluxiones ipsius y . Fluat x uniformiter et sit $\dot{x} = 1$, atque æquatio evadet $\dot{y}^2 = 1 - y^2$, undè $2 \dot{y} \ddot{y} = -2 y \dot{y}$ vel $\ddot{y} = -y$, et indè $\dot{y} = -\dot{y}$, $\ddot{y} = -\ddot{y}$, $\dot{y} = -\dot{y}$, &c. Quoniam existente arcu $EC = 0$, fit $y = AE = 1$, pro y substitue unitatem, et erit $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = -1$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 1$, $\dot{y} = 0$, &c. In serie generali pro hisce fluxionibus hosce valores substitue, unitatem pro A et unitatem pro r , atque proveniet

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c.$$

Et eodem modo invenire licet sinum AB ex dato ejus arcu EC .

Ex hoc exemplo constat operationem admodum alleviari supponendo x et non x^2 fluere uniformiter. Idem alibi notandum est, nam r (quæcumque sit forma seriei) ad libitum fere sumi potest. Ut si forma seriei quæsitæ esset

$$A x^{\frac{1}{2}} + B x^{\frac{2}{3}} + D x^{\frac{11}{3}} + E x^{\frac{17}{3}} + \&c.$$

ubi differentia exponentium est 2, non opus est ut sit $r = 2$, sed potest esse quælibet numerorum sequentium 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c.

Methodus hæc reducendi radices æquationum in series convergentes, haud absimilis

est methodo assumendi seriem coefficientibus indeterminatis affectam; at plerumque minùs operosa, præsertim si desiderentur seriei termini tantùm pauci initiales: hi sufficiunt ad inveniendas tangentes, radios curvaturæ, Asymptotos et similia.

De Æquationum resolutione in numeris.

Hæc de æquationum reductione litterali dicta sufficiant; de numerali itaque adjicere pauca licet.

Omnis æquationum reductio, uti suprâ diximus, ex hoc pendet, ut primò assumatur quantitas radici quæsitæ æqualis proximè, et postèa ut valor ille assumptus corrigatur. Exempli gratiâ, sit æquatio cubica $y^3 - 21y - 16 = 0$, cujus radix quæritur; et tentando, vel per constructionem geometricam inveno esse 5 numerum propè verum, itaque pro y substituo $p + 5$, et provenit æquatio nova $p^3 + 15p^2 + 54p + 4 = 0$; jam quoniam est y proximè æqualis 5, erit p quantitas admodum parva et per consequens ejus potestates altiores erunt ipso multò minores; neglectis igitur terminis minoribus $p^3, 15p^2$ erit ferè $54p + 4 = 0$, vel $p = -\frac{4}{54} = -0,074$, ergo $p + 5 = y = 4,926$ proxime. Si quæritur radix magis accurata, pro p ponendum est $q - 0,074$,

atque operationem perficiendo invenies plures figuras radici jam inventæ adnectendas.

Hæc methodus ea est quam invenit et in *Analysi* suâ tradidit *D. Newtonus*. Sunt et aliæ methodi idem perficiendi qualis est ea *J. Raphson* et *Cl. Hallei*, sed ex eâ jam traditâ omnes pendent et facillè fluunt.

Hoc modo reducuntur æquationes omnes vulgares, in quibus scilicet existit unica tantùm quantitas ignota: verum etiam æquationes hujusmodi $y^2 + 3y - 7y = 0$ simili modo possunt reduci. Sed in æquationes istius modi, quarum usus nondùm penè innotuit, tempus impendere jam non vacat. *Æquationes fluxionales*, quoniam in iis semper reperiuntur plures quantitates incognitæ ut pote radix extrahenda cum fluxionibus suis, dicto modo sunt irreducibiles. Ut ergo earum radices in numeris haberi possunt, ad series confugiendum est. Ex seriebus enim, quotiescunque sat celeriter convergunt, expedite inveniuntur radices æquationum. Si quando non convergunt, tantum opus est (monente ipso *Newtono* sub finem *Analyseos*) ut x , scilicet quantitas ex cujus potestatibus conficitur series, aliquoties adhuc minor supponatur; adeoque radix non unica sed pluribus seriebus habenda est. Quomodo vero hoc fit, statim erit manifestum.

Sit Curva DC (fig. 2.) cujus Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Et quærat ur y vel BC in numeris quando Abscissa evadit AB . Reducatur Ordinata in seriem, et si series illa sat citò convergat, dabitur BC : at si non convergat, eousque minui intelligatur x ut tandem celeriter convergat series; in illâ magnitudine sit $x = AE$, et series dabit in numeris Ordinatam EF . Jam sumo novam Abscissam $EB = z$, et quæro relationem inter z et y , ex quâ invenietur valor ipsius y in serie ex potestatibus ipsius z confectâ. Si series illa sat citò convergat, quum est $z = EB$, habemus quæsitum; at si non convergat, eodem modo minui jam intelligatur z quò prius x , ut convergat series; sit in illo casu $z = EG$, et dabitur ordinata GH . Rursus sit Abscissa tertia $GB = v$, et quærat ur relatio inter v et y , quâ inventâ reducatur y in seriem ex dignitatibus ipsius v confectam; quæ si non adhuc celeriter convergit, minuat ur v et sit ea $= GK$, quæ GK sit tam parva ut series ad libitum convergat, et dabitur Ordinata KL . Sumo quartò Abscissam $KB = u$, et quæro relationem inter u et y , ex quâ invenio valorem ordinatæ y in serie, quæ si citò convergat habemus ipsam BC quam quærimus. At si non convergit, eodem

modo continuè procedere licet quo priùs : atque ex tali processu Abscissa ultima KB tandem evadet minor datâ quâvis quantitate ; ideoque series ultima ad libitum converget.

Hic notandum est quod est AD primus terminus seriei, quando AE est Abscissa et EF ordinata ; EF est primus terminus quando EG est Abscissa et GH ordinata ; GH est primus terminus quando GK est Abscissa et KL ordinata ; KL est primus terminus seriei quando KB est Abscissa et BC ordinata. Ideoque priusquam haberi potest ordinata quævis subsequens, necessario habendæ sunt omnes antecedentes, et ergo antequam ordinata BC inveniri possit, investigandæ sunt omnes aliæ. Adjiciendum jam esset exemplum unum aut alterum, sed methodum hanc per se satis patentem ducens, tædium calculi evitare institui.

Subnecterem jam quædam de præparatione æquationum, nam aliquæ æquationes præparatione indigent antequam earum radices erui possunt. In æquationibus Lineas rationales designantibus nullam novi difficultatem ex hæcenus dictis facile non tollendam : non item in æquationibus fluxiones involventibus. Hæ aliquandò præparantur mutando Ordinatam, alias Abscissam ; aliquandò utramque :

sed sunt æquationes quibus nulla sufficit præparatio, quantum mihi constare potuit: ego de re dubiâ tractare non suscipio. Certè illi quicumque hanc materiam aggredietur prodibunt calculi quorum onus ægrè sustinendum est.

PROP. IV. THEOR.

Asymptotos recta decussare potest Curvam in totidem punctis, demptis duobus, quot Curva est dimensionum et nunquam pluribus.

Linea quævis secari potest à rectâ in tot punctis quot ipsa est dimensionum et nunquam pluribus, quoniam æquatio tot habere potest radices quot ipsa est dimensionum et non plures. Sit jam v. g. linea tertii ordinis Asymptoton habens *BAC*. (*fig. 3.*) Duc rectam quamvis *FDE* secantem Curvam in tribus punctis *D, L, E*. In hac rectâ sit quodlibet *F*, circâ quod tanquam polum gyretur recta *DE*, per situm *F* d l e tandem in situm *F^δ λ* perveniens; ubi est Asymptoto parallela: et *E* unum intersectionis punctum abiit in infinitum: ideoque in illâ positione recta *δ* occurrit Curvæ in duobus tantum punctis *δ, λ*. Moveatur recta *δλ* motu parallelo donec tandem cum asymptoto *BC* coëat,

et in illo casu punctum δ etiam abibit in infinitum : restat igitur unicūm punctum A in quo Asymptotos Curvam decussare potest. Et similiter in ullo alio casu ostendetur duo intersectionis puncta abire in infinitum , hoc est , evanescere et nullibi reperiri. Proinde restabit numerus punctorum , in quibus Asymptotos decussare potest Curvam , æqualis numero dimensionum Curvæ dempto binario. Q. E. D.

Coroll. 1. Linea secundi ordinis , id est , sectio conī ejus Asymptoton non omninò decussat ; Linea tertii ordinis ejus Asymptoton decussare potest in unico tantūm puncto , Linea quarti ordinis in duobus et nunquam pluribus. Et sic in aliis.

Coroll. 2. Linea secundi vel tertii ordinis Asymptoton non tanget ; Linea quarti vel quinti ordinis ejus Asymptoton tangere potest in unico puncto. Et sic porro. Liqueat hoc Corollarium exindè quod punctum contactūs conflatur ex pluribus intersectionum punctis in unum cocuntibus.

Coroll. 3. Si linea quarti ordinis tangat ejus Asymptoton , radius Curvaturæ in puncto contactūs semper erit finitus : nam punctum illud contactūs conflabitur ex duobus tantūm intersectionum punctis.

Coroll. 4. Si duo crura Asymptoton aliqua adjacentia, jaccant ad easdem ejus partes, vel ad contrarias et simul ad eandem plagam protensa, tria ad minimum intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Coroll. 5. Hinc colligimus maximum numerum Asymptotôn parallelarum quas Linea quævis habere potest, æqualem esse numero ejus dimensionum demptâ unitate.

Coroll. 6. Et si curva habeat tot Asymptotos parallelas, demptâ unitate quot ipsa est dimensionum, ea earum nullam secare potest.

P R O P. V. T H E O R.

Si ordinata Curvæ parallela sit Tangenti, ad punctum infinitè distans, Ordinata illa in æquatione Curvam definiente non ascendet ad tot dimensiones quot est Curvâ.

Sit *ALHK* crux Curvæ infinitum (*fig. 4.*) Abscissa *AC = x*, Ordinata *CL = y*, *DHK* tangens ad *H* punctum infinitè distans, cui parallela sit ordinata *BL = v*, eique sit correspondens Abscissa *AB = z*. Dico in æquatione ad Curvam quod *v* non ascendet ad tot dimensiones quot est Curva.

Per *H* duc ordinatam *HE*, cui parallela *KGF*, existente *EF* quàm minima; sit porro

GH Abscissæ parallela. Concipiatur punctum *L* abire in infinitum, adè ut coëant puncta *L, H; B, D; C, E;* & in illo casu erit $AE = x, EH = y, GH = \dot{x}, GK = \dot{y}, AD = z, DH = v.$ Reducatur *y* in seriem hujusmodi

$Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} + \&c.$
 eo citiùs convergentem quo major est *x*. Index ipsius *x* in primo termino seriei necessariò erit unitas, quoniam ultima tangens *DH* datam ad Abscissam *AB* supponitur habere inclinationem. Erit

$$\dot{y} = A\dot{x} + (1-n)Bx^{-n}\dot{x} + (1-2n)Cx^{-2n}\dot{x} + \&c.$$

Undè est

$$\dot{x} : \dot{y} :: 1 : A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \&c.$$

vel ob similia triangula *DEH, HGK,*
 $1 : A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \&c. :: DE : y;$
 ideoque invenietur $DE = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$

ponendo pro *y* ejus valorem in serie. Et

$$AD = AE - DE = -\frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$$

Sit jam *x* infinitè magna, et erit accuratè,

$$y = EH = Ax, \quad AD = -\frac{nB}{A}x^{1-n},$$

quumque per naturam seriei sit *n* numerus

affirmativus, erit AD infinite minor EH , et etiam infinite minor DH quæ ad EH datam habet rationem: hoc est τ infinite minor ν , igitur in æquatione ν non erit tot dimensionum quot est τ , adæoque nec tot quot est Curva. Q. E. D.

Coroll. 1. Igitur æquatio $x = a$ designat rectam, ubi ordinata y nullius est dimensionis, $(x+a)y = bx^2 + cx + d$ omnes secundi ordinis quæ pergunt in infinitum, $(x+a)y^2 = (bx^2 + cx + d)y + ex^2 + fx^2 + gh + h$ omnes tertii ordinis, et sic in reliquis.

Coroll. 2. Si existente Abscissâ Curvæ infinite magnâ, Ordinata sit adhuc infinite major, ea parallela erit Tangenti cruris parabolici ad distantiam infinitam.

Coroll. 3. Sin ordinata sit infinite magna, quum Abscissa non est infinite magna, ea parallela erit Asymptoto cruris hyperbolici.

Coroll. 4. Constat methodus determinandi positionem Tangentium curvarum ad distantiam infinitam, id est, positionem ordinarum quæ in æquatione non ascendunt ad tot dimensiones quot est curva, scilicet ex ratione quam ad invicem habent x, y in ultimâ earum magnitudine: quæ ratio semper invenitur ope serierum convergentium.

Scholion.

Poteram hanc propositionem eodem modo demonstrare quo priorem. Nam in æquatione tot semper peribunt Ordinatæ dimensiones, quot intersectionis ejus puncta abeunt in infinitum. Et si quando in aliquâ curvâ ordinata non est tot dimensionum quot est curva, semper concipiendum est puncta quædam intersectionis abire in infinitum: imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet; nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam. Finge enim Curvam habere tot Asymptotos quot habet dimensiones, quarum nullæ duæ sunt inter se parallelæ: atque Ordinatæ illis æquidistantes tot erunt dimensionum quot est Curva, demptâ unitate. Concipe Asymptotos plures motu angulari latas, donec tandem evadant parallelæ, et ordinatæ omnibus illis parallelæ perdent tot dimensiones quot sunt Asymptoti æquidistantes. Quod si fortè æquatio Asymptotos duas vel plures determinans evadat impossibilis, evanescent Asymptoti illæ cum earum cruribus; at Ordinatæ non erunt plurium dimensionum quam antea erant: atque hinc redditur ratio, quomodo in Ovalibus aliisque curvis, Ordinatarum nulli tangenti ultimæ

parallelarum evanescunt dimensiones: sequitur verò in illis casibus dimensionum evanescentium numerum semper esse parem, quoniam radicum impossibilium numerus est par. Si fortè evenit, quod ordinatæ unicæ Asymptoto parallelæ perdunt plures dimensiones, et nulla interim comparet æquatio, per cujus radicum impossibilitatem Asymptoti reliquæ evanescunt; tum concipe plures Asymptotos in unam coire. In illis casibus Asymptotos semper habet crura plura solito ad easdem plagas extensa. Numerus vero Asymptotôn cocuntium quas curva quævis habere potest, æqualis est numero Asymptotôn parallelarum quas habere potest; priusquàm enim cocunt, evadunt parallelæ.

PROP. VI. PROBL.

Invenire Asymptotos Curvarum.

Ex datâ æquatione ad curvam reducatur ordinata y in seriem hujusmodi

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \&c.$$

eo citius convergentem quo major est abscissa x : sume ordinatam novam z æqualem terminis omnibus hujus seriei initialibus, qui augendo x non minuentur: et ordinarum y , z differentia augendo x continuè diminuetur, atque ordinatæ ipsæ ad æqualitatem magis

magisque tendent : undè Linearum abscissam communem x et ordinatas y , z habentium crura tantò propius ad se invicem continuè accedunt, quantò magis producuntur, et tandem coincidunt : atque adeò z est ordinata Asymptoti, quæ dabitur ex æquatione eam definiente. Q. E. I.

Coroll. 1. Igitur infinita sunt crurum genera ; quo simplicior est ordinata z , eo simplicius erit crus : quod si sit z ordinata rectæ, crus erit hyperbolicum.

Coroll. 2. Si primus terminus seriei, qui augendo x minuitur, sit affirmativus, Asymptotos jacet inter curvam et abscissam ; sin minus curva jacet inter Asymptoton et abscissam. Nam terminus ille seriei evadit æqualis parti ordinatæ inter crus et ejus Asymptoton interceptæ, ubi est x infinitè magna.

Coroll. 3. Ordinatæ Ovalium reduci nequeunt in series ad veritatem tanto magis accedentes quanto major est x . Nam si hoc fieri possit, ordinata ovalis esset quantitas realis cum abscissa est infinitè magna. Sed ordinata ovalis est imaginaria cum abscissa est infinitè magna. Undè liquet methodus dignoscendi ovaies.

Coroll. 4. Simili prorsùs ratiocinio colligitur, quòd si quando ordinata curvæ evadere possit infinitè magna, non item abscissa ; valor or-

dinatæ haberi nequit in serie eo citiùs convergente quo major est abscissa.

Coroll. 5. Omnis linea imparis cuiusque ordinis pergit in infinitum. Etenim linea ordinis imparis designatur æquatione imparium dimensionum, adeoque ad minimum reperietur una series eo citiùs convergens quo major est x , proptereà quod æquatio imparium dimensionum ad minimum unam habet radicem possibilem. Et series istius modi (per *Coroll. 3.*) ad ovals non extenditur, ergo ad curvas quæ progrediuntur in infinitum.

Coroll. 6. Hinc etiam sequitur, quod ovalium tum abscissæ tum ordinatæ semper sunt parium dimensionum. Nam si esset alterutra imparium curva (per *Coroll. 5.*) pergeret in infinitum.

Coroll. 7. Linea quævis tot habere potest Asymptotos quot ipsa est dimensionum et nunquam plures. Nam tot habere potest, quot habet radices æquatio quæ dat primum terminum serici $Ax + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \&c.$ id est quot curva est dimensionum, ut constat ex serierum doctrinâ.

Coroll. 8. Si terminorum initialium plures valores coincidunt, Asymptoti plures in unam coibunt: et figura habebit crura plura solito ad eandem plagas extensa: ut accidit Conchoidi Veterum,

Veterum, quæ habet quatuor crura ad unicam Asymptoton jacentia.

Coroll. 9. Si numerus dimensionum curvæ sit par, et numerus Asymptotôn impar; vel si numerus dimensionum sit impar, et numerus Asymptotôn par, figura habebit duo crura ad unicam Asymptoton jacentia quæ in plagas eadem in infinitum serpunt.

Exempla.

1. Series $x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x}$ &c. quam (in

Exemplo 1. Prop. 2.) invenimus pro radice æquationis $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere Asymptoton æquatione $z = x - \frac{1}{3}a$ designatam, adeoque ejus crura esse hyperbolica. Et quia $\frac{a^2}{3x}$, terminus primus seriei qui augendo x minuitur, est affirmativus, Asymptotos jacet (per *Coroll. 2. Prop. 6.*) inter curvam et abscissam. Et quoniam unica tantùm series istiusmodi obtineri potest, figura non habet nisi duo crura ad unicam Asymptoton rectam jacentia.

2. Series illa $\frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3} - \&c.$ quam

(in *Exemp. 2. Prop. 2.*) invenimus pro radice

G

æquationis $y^3 + ay^2x + a^2x^2 - 2a^3x = 0$ indicat abscissam esse Asymptoton habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas extensa.

3. Series $x - \frac{1}{3}a + \frac{a^3}{81x^2}$ &c. quæ est radix æquationis $y^3 + ax^2y - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere duo crura ad eandem ejusdem Asymptoti rectæ partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

4. Series illæ duæ $x + \frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4x}$ &c.

et $2x + a - \frac{2a^2}{7x}$ &c. quæ (in *Ex. 4. Prop. 2.*)

prodiere pro radicibus æquationis

$x^3y^2 - 3x^2xy + 2x^2x^2 - ax^2y^2 + a^2x^2 = 0$ indicant illam æquationem designare curvam habentem duas Asymptotos rectas, quarum quælibet habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

5. Series duæ $x + \frac{a^2}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c.

$x - \frac{a^2}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2}$ &c. indicant duas Asym-

ptotos in unam coisse; et illam habere duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas eandem infinite progredientia. Adeoque

ordinatæ Asymptoti illi parallelæ (per *Coroll. 4. Prop. 4.*) erunt unius tantum dimensionis. Habet verò curva aliam Asymptoton quæ ex aliâ serie dabitur.

Scholion.

Methodus inveniendi Asymptotos in hâc Propositione exposita est maximè generalis ; sunt et aliæ methodi quamplures particulares inveniendi Asymptotos rectas, quas tamen omnes comprehendit eâ jam tradita : considerari potest Asymptotos recta ut tangens ad punctum curvæ infinitè distans, et hoc modo reducitur Asymptoton doctrina ad doctrinam tangentium, vel considerari possunt Asymptoti tanquam extremæ crurum partes in directum productæ. Sed omnes hæ methodi præsupponunt, aliquo saltem modo, serierum doctrinam.

Vide fig. 4. Invenienda sit Asymptotos Curvæ *ALH*, quam designat æquatio $y^3 - axy - x^3 = 0$, ubi *x* et *y* easdem designant rectas quas in quintâ Propositione designabant. Capiatur æquationis fluxio, et erit $3y^2 \dot{y} - ax\dot{y} = 3x^2 \dot{x} + ay\dot{x}$, unde $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 + ax : 3x^2 + ay$, hoc est, *HG* ad *GK* vel *DE* : *EH* :: $3y^2 + ax : 3x^2 + ay$, pro *y* substitue *x* ejus valorem, quum est *x*

infinite magna, et erit $DE:EH::3x^3 - ax:3x^2 + ax$, et sumendo rationem ultimam $DE:EH::3x^3:3x^2$, id est, in ratione æqualitatis. Datur igitur Asymptotos DH positione. Restat jam ut inveniatur in Abscissâ punctum D per quod transit Asymptotos. Quoniam mox ostensum est esse $DH:EH$ vel $DE:y::3y^3 - ax:3x^2 + ay$ erit

$$DE = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 + axy} = \frac{3x^3 - ax^2}{3x^2 + ax}$$

ob y æqualem x . Subducatur jam recta illa DE ex abscissâ x et restabit AD

$$\begin{aligned} &= x - \frac{3x^3 - ax^2}{3x^2 + ax} = \frac{3x^3 + ax^2 - 3x^3 + ax^2}{3x^2 + ax} \\ &= \frac{2ax^2}{3x^2 + ax} = \frac{2}{3}a; \end{aligned}$$

quoniam est x infinite magna. Et indè datur Asymptotos DH . Hic notandum est, quod in hoc calculo præsupponitur serierum doctrina: propterea quod oportet invenire y quando x est infinite magna: hoc vero absque serie universaliter obtineri nequit.

Aliquando non licet invenire Asymptotos reducendo Ordinatam in seriem. Ut si esset æquatio ad lineam quarti ordinis.

$$y = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{fx^2 + gx + h};$$

ubi est Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$.

Reducatur y in seriem

$$\frac{ax}{f} + \frac{bf - ag}{f^2} + \&c.$$

Ex hâc serie inveniatur unica tantum Asymptotos FE ; reliquæ enim Asymptoti, Ordinatæ parallelæ ex illâ non prodeunt: prodibunt tamen reducendo valorem Abscissæ in seriem ex dignitatibus ordinatæ descendentibus confectam; sed facilius hoc modo. Patet enim Ordinatam evadere infinitè magnam, adeoque curvæ Asymptoton, quotiescumque quantitas $fx^3 + gx^2 + hx + k$ evadit nihil: et hoc ter accidere potest, propter æquationis cubicæ $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$, tres radices. Nam si æquationis illius radices omnes sint reales et inæquales, eæ sunt AG, AD, AH , (*fig. 5.*) et tres Ordinatæ per puncta G, D, H transeuntes erunt totidem Asymptoti. Quare in illo casu curva habet omnino quatuor Asymptotos et octo crura adjacentia; uti in schemate videre est. At si æquationis illius duæ radices æquales sint, duæ Asymptoti coibunt; atque evanescent crura quæ prius inter eas contenta erant. Et curva habebit duas tantum Asymptotos cum sex cruribus. Si æquationis supradictæ radices omnes sint æquales, aut earum duæ imaginariæ, vel coibunt

tres Asymptoti vel duæ evanescent, at in utroque casu figura habebit duas Asymptotos sese secantes; in quarum angulis oppositis jacent hyperbolæ oppositæ ad instar hyperbolæ conicæ.

In Asymptotôn rectarum inventionem, non semper necesse habemus ad series recurrere. Nam assumi potest æquatio universalis designans omnes curvas generis alicujus, et inde serierum ope construi potest Canon generalis qui sufficiat ad inventionem Asymptotôn linearum omnium illius ordinis. Ut si esset æquatio

$Ay^3 + Bxy + Cx^3 + Dy + Ex + F = 0$;
ad conisectiones, ubi est x abscissa, y Ordinata; suppono y æqualem huic seriei

$$ax + b + cx^{-1} + \&c.$$

Et determinando coefficients, uti jam ostensum est, inveniatur esse a radix æquationis $Aa^3 + Ba + C = 0$, undè dabitur a ; eritque

$$b = -\frac{Da + E}{2aA + B} \quad c = -\frac{Ab^3 + Db + F}{2aA + B}$$

Si æquatio sit

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0$$

ad Lineas tertii ordinis, erit a radix æquationis:

$$Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0,$$

$$b = - \frac{Aa^2 + Ba + C}{3Ea^2 + 2Fa + C} \text{ atque erit}$$

$$c = \frac{-3Aab^2 + Bb^2 + Eab + Fb + Ha + K}{3Aa^2 + 2Ba + C}$$

Quibus expressionibus semel inventis, invenire licet Asymptotos rectas harum curvarum absque recursione ad series. Et notandum est quod a semper dat inclinationem Asymptoti ad abscissam, b dat distantiam inter principium Abscissæ et punctum in quo Asymptotos eandem secat, c denique ostendit ad quas Asymptoton partes jacent earum crura. Hæc omnia ex propositione et ejus corollariis admodum manifesta sunt.

PROP. VII. PROBL.

*Invenire numerum et plagam crurum
Asymptoton aliquam adjacentium.*

Cas. 1. Sit primò curva, cùjus Asymptotos recta AD per initium Abscissæ transiens (fig. 6.), Abscissa $AB = x$, et ipsi AD parallela sit Ordinata $BC = y$. Reducatur y in seriem $\frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n+1}} + \frac{C}{x^{n+2}} + \&c.$

eo citius convergentem quo minor est x . Et n index ipsius x semper erit affirmativus, propterea quod quum est x infinitè parva, Ordinata y coincidit cum Asymptoto, et per

consequens est infinitè magna. Jam sit x infinitè parva, et evadet $y = \frac{A}{x^n}$ accuratè, qui valor est infinitè magnus et affirmativus; quare curva habet crus unum ad eandem Asymptoti AD partes jacens cum ordinatâ BC , et in eadem cum. Ordinatâ partes extensum. Mutari jam concipe signum ipsius x , et eam etiamnum manere infinitè parvam; atque si n sit numerus integer vel fractus cum denominatore impare, figura habebit aliud crus ad alias Asymptoti partes jacens, et in eadem cum priori plagas extensum, si n est numerus par, at in oppositas si sit n impar vel fractus cum denominatore impare. Si verò sit n fractio cum denominatore pare, signum ipsius x mutari nequit, at Asymptotos habebit duo crura ad eandem ejus partes jacentia et in plagas oppositas serpentina.

Cas. 2. Si Asymptotos sit curva, numerus crurum dignoscitur ex numero valorum Ordinatæ cocuntium, cum Abscissa est infinitè magna.

Si alii sint serierum casus, alii itidem erunt crurum casus, at eorum plagæ et numerus semper innotescunt. Q. E. I.

Coroll. 1. Si n sit numerus integer et par; Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus

partes jacentia et in plagas easdem progredientia.

Coroll. 2. Si n sit integer et impar, vel fractus cum impare denominatore, Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

Coroll. 3. Si n sit fractus cum denominatore pare, Asymptotos habet duo crura ad easdem ejus partes jacentia et in plagas oppositas serpentina.

Coroll. 4. Hinc etiam comparantur longitudines Asymptotôn inter se. Undè constabit quasdam ad se invicem datam/habere rationem, alias vero esse aliis infinitè majores vel minores.

Coroll. 5. Quamvis omnia crura cum Asymptotis suis tandem coïncidere censenda sunt; tamen in distantiiis æqualibus utcunque magnis aliqua crura ad Asymptotos suas aliis infinities propinquiora accedunt.

PROP. VIII. THEOR.

Æquatio $y = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + f x^5 + g x^6 + \&c.$ designat figuram habentem duo tantum crura infinita ad easdem vel oppositas plagas progredientia prout index dignitatis x in termino altissimo est numerus par vel impar.

Sensus propositionis est, quod æquationes
 $y = a + bx$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$,
 $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, &c.
 ubi indices terminorum altissimorum sunt
 numeri impares, designant figuras habentes
 duo tantum crura infinita ad oppositas plagas
 protensa; et quod æquationes

$y = a + bx + cx^2$, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$,
 $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, &c.
 ubi terminorum altissimorum indices sunt
 numeri pares, designant figuras habentes duo
 tantum crura infinita ad eandem plagam per-
 gentia.

Propositio verò sic demonstratur.

Concipe abscissam x perpetuo augeri, et
 simul augebitur ordinata y ; sit x tandem in-
 finite magna, et erit etiam y infinite magna;
 adeoque figura habet crus infinitum. Cum vero
 ordinata y est infinite magna, pendet ejus
 signum, hoc est, plaga cruris infiniti, ex signo
 termini altissimi, quoniam in illo casu is est
 reliquis infinite major. Evadat jam x negativa,
 id est, sumatur abscissa ad alteras partes, et
 ad illas partes infinitum augeatur; atque etiam
 augebitur y in infinitum; unde curva habet
 crus aliud infinitum. Si index termini altissimi
 sit par, ejus signum in utroque casu idem est.

sin impar in uno casu crit affirmativus, in altero negativus. Cum igitur plaga crurum pendet ex signo termini altissimi, in primo casu pergunt crura ad plagas easdem, in secundo ad oppositas. Q. E. D.

Pendet itaque tota hujus demonstrationis vis ex termino altissimo; adeoque nihil refert quomodo sese habeant termini intermedii. Eodem res redit, utrum affirmentur vel negentur; utrum sint in æquatione vel non; nam demonstratio ab illis minimè turbabitur.

Scholion.

Propositionem hanc eo consilio præmisi, ut per eam facilius pateret aditus ad quasdam æquationum affectiones à nemine quantum scio huc usque satis expositas, at necessario intelligendas ab eo qui sequentem curvarum enumerationem aggreditur. Usus verò propositionis exemplis sequentibus statim apparebit in dignoscendis realibus et imaginariis radicibus æquationum, idque vel calculo; vel describendo curvam; sed et describendo curvas construuntur æquationes; satis quidem expedite, modo quis hâc methodo procedere assuetus sit. Nam si æquatio sit cubica, sufficit invenire quinque vel sex curvæ puncta; si Biquadratica, sufficit invenire octo vel decem.

Exemplum primum.

Sit $y = x^2 + Ax + B$ æquatio designans curvam habentem duo crura ad eandem plagam protensa, cujus abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$. AB vel secat curvam in duobus punctis D, E , (*fig. 7.*) vel in nullis (*fig. 8.*); Sit jam $y = 0$, vel $x^2 + Ax + B = 0$, et æquationis illius radices erunt AD et AE in figurâ 7^a, at in figurâ 8^a sunt imaginariæ. Vides igitur quod, in casu primo, existente abscissâ minore minimâ radice AD vel majore maximâ AE , ordinata correspondens erit affirmativa: atque ordinata inter puncta D et E erecta est negativa. Hæc autem omnia vera sunt ex hypothesis quod terminus altissimus x^2 sit affirmativus. Igitur D, E sunt limites in quibus ordinata y nec affirmatur neque negatur sed nulla est, hoc est in quibus quantitas $x^2 + Ax + B$ nec affirmatur neque negatur, sed nihil est. Et ordinatæ punctis D, E proxime et ad diversas eorum partes jacentes, signa contraria semper habebunt. In casu secundo, quando abscissa minimè secat curvam, ordinatæ omnes ejusdem sunt signi tendentes ad plagam crurum.

Supponamus jam esse aliam curvam eandem Abscissam AB habentem: Ordinatam

vero quæ realis sit quum Ordinata y est affirmativa, quæque imaginaria sit quum y est negativa. Et in casu primo quando æquationis $x^3 + Ax + B = 0$ radices sunt reales (*fig. 7.*) Ordinatæ novæ curvæ per puncta D et E transeuntes semper tangent curvam et puncta contactûs erunt limites per quos ordinatæ motu parallelo latæ transeunt ipso temporis momento, quo evadunt possibles ex impossibilibus, aut è contrâ. Atque Ordinatæ inter puncta D , E erectæ reales aut imaginariæ erunt prout negatur aut affirmatur terminus x^3 . Ordinatæ ad alia quævis abscissæ puncta erectæ reales aut imaginariæ erunt prout affirmatur aut negatur terminus ille x^3 .

In casu secundo ubi abscissa non secat curvam, Ordinatæ omnes hujus novæ curvæ reales quidem erunt quandò affirmatur x^3 , sed omnes prorsus imaginariæ quando negatur idem terminus.

Sit FG ordinata maxima (*fig. 7.*) inter puncta D , E erecta, at in (*fig. 8.*) omnium minima, et in illo casu crit $\dot{y} = 0$, vel $2x\dot{x} + A\dot{x} = 0$, undè $x = -\frac{1}{2}A = AF$: quem valorem in æquatione pro x substituet, et invenies $y = B - \frac{1}{4}AA = FG$. Et patet quod Abscissa secat vel non secat curvam,

prout Ordinata illa FG tendit ad contrarias vel easdem plagas cum cruribus; hoc est æquationis $x^3 + Ax + B = 0$ radices sunt possibiles quando affirmatur quantitas $\frac{1}{4}AA - B$, et impossibiles quando negatur eadem.

Exemplum secundum.

Sit æquatio $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ designans curvam habentem duo crura in plagas oppositas protensa, cujus Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. AB vel secat curvam in tribus punctis (*fig. 9.*) vel in unico (*fig. 10. 11.*). Sit $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, et hujus æquationis radices erunt AD , AE et AF . Igitur si radices omnes sint reales ut in (*fig. 9.*) existente Abscissâ minore radice mediâ AE et majore minimâ AD , vel majore maximâ AF , Ordinatæ valor respectivus erit affirmativus; et ordinatæ ad alia quævis puncta erecta erunt negativæ. Negativæ enim et affirmativæ evadunt ordinatæ semper per vices. Jam sit alia curva cujus Ordinata possibilis fit, quando y est affirmativa, impossibilis verò quando negativa; et Ordinata illa nova subibit vices omnes possibilitatis, quas subit y mutationis signorum $+$ et $-$: scilicet tres Ordinatæ ad puncta D , E , F erecta tangent curvam, et puncta contactûs erunt limites in

quibus y incipit vel desinit esse. Et si Ordinatæ affirmativæ tendant ad eandem plagam cum ordinatâ BC , intrâ limites D, E continebitur curva partem figuræ constituens: jacebit verò altera pars figuræ ad easdem partes puncti F cum BC : et semper progredietur in infinitum ab F versùs B , quoniam unicus illi tantum adest limes. In casu altero, ubi Abscissa secat curvam in unico puncto (*fig. 10. 11.*) si x^3 terminus altissimus affirmatur, ordinatæ omnes negativæ aut affirmativæ erunt prout jacent ad partes puncti D easdem vel contrarias iis ad quas jacet A . Et omnia quæ de primo casu dicta sunt, ad hunc casum mutatis mutandis facillè accommodantur.

Methodus determinandi radices reales et imaginarias æquationis cubicæ.

Pone $y = 0$, et erit $3x^2 + 2Ax + B = 0$; cujus æquationis radices in *fig. 9^a* et *10^a*; scilicet AG, AK , at impossibiles in *fig. 11^a*. Igitur si æquationis $3x^2 + 2Ax + B = 0$ radices sint impossibiles, id est, (per *Exemp. 1*) si $\frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}B$ vel $\frac{1}{3}AA - B$ sit negativa quantitas, æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices sint reales ut in *fig. 9. 10*, æquationis $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ radices omnes sunt reales ubi Ordinatæ GH, KL contraria ha-

bent signa, (*fig. 9.*) & imaginariæ quando eadem habent. (*fig. 10.*) Pone $DD = AA - 3B$, invenies

$$GH = C + \frac{2A^3 - 3A^2D + D^3}{27},$$

$$LK = C + \frac{2A^3 + 3A^2D - D^3}{27}.$$

Et hisce valoribus semel inventis, facilè est invenire quæ radices reales sunt, quæ non.

Exemplum tertium.

Sit jam $y = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ æquatio designans lineam habentem duo crura infinita ad easdem plagas protensa. Pone $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$; hujus æquationis radices quatuor sunt (*fig. 12.*) RA , RB , RC , RD ; at in (*fig. 13, 14, 16.*) duæ radices impossibiles, et in *fig. 15, 17.* omnes sunt impossibiles. Pone $y = 0$, et erit $4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D = 0$, cujus æquationis tres radices (*fig. 12, 13, 14, 15*) sunt RE , RG , RL : at in *fig. 16, 17* æquatio illa unicam tantum habet radicem RE . In primo casu (*fig. 12.*) si ordinatarum EF , GH , LK , duæ sunt negativæ, et tertia affirmativa, æquatio $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, habet quatuor radices possibiles. Si ordinatarum duæ sint affirmativæ et tertia negativa (*fig. 13.*)

(fig. 13.) vel si omnes tressint negativæ (fig. 14.) æquatio non habet nisi duas radices reales: si ordinatæ omnes sint affirmativæ (fig. 15.) radices omnes erunt impossibiles.

In secundo casu, quando æquationis $4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D = 0$ radix unica erit possibilis (fig. 16, 17.) Si ordinata EF sit negativa (fig. 16.) radices duæ erunt reales tantum: at si ordinata illa sit affirmativa (fig. 17.) omnes radices erunt imaginariæ. Hi sunt casus æquationis Biquadraticæ.

Undè inveniri potest canon generalis pro dignoscendis radicibus realibus et imaginariis æquationum biquadraticarum, ut in *Exemplis primo et secundo* fecimus pro æquationibus quadraticis et cubicis. Hoc verò prolixum admodum requirit calculum. Sufficiat quod novimus quomodò tractanda est æquatio particularis, ubi calculus non erit adedò laboriosus. Eadem methodus ad omnes æquationes extenditur. Si sit nova curva ordinatam habens realem quando hujus est affirmativa et imaginariam quando hujus curvæ ordinata est negativa, vices omnes possibilitatis et impossibilitatis facillimè innotescunt per ea quæ diximus in *exemplis duobus primis*.

Ex hisce exemplis satis apparet numerum radicum impossibilium semper esse parem. Item

sequitur, quod si sit æquatio

$$x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \&c. = 0,$$

et sit $B^2 - Cn^2(n-2)(n-3)(n-4) \&c.$ quantitas negativa, æquatio illa ad minimum habebit duas radices imaginarias. Continuanda vero est series $n^2(n-2)(n-3) \&c.$ donec n per continuam unitatis subductionem tandem exhauriatur. Et si desit terminus secundus $B x^{n-1}$, et $C x^{n-2}$ huic proximus sit affirmativus, æquatio ad minimum habebit duas radices imaginarias.

Ex propositionibus hactenus traditis invenire licet genus, positionem, plagam et numerum crurum infinitorum : et ex hâc propositione ejusque exemplis invenies quæ crura conjunguntur : adeoque invenies formam curvæ. Et faciendo rectam gyrare circà punctum aliquod idoneum, et secare Parabolas quas in hâc propositione descripsimus, habebuntur omnes casus alicujus æquationis radicum possibles; hoc est, omnes formæ curvarum quas æquatio generalis designat : et indè enumerantur Linearum species, siquidem species curvarum non tam ab ipsarum intimâ naturâ, quam à formâ pendere volumus.

Propositiones quæ sequuntur continent con-similes aliquot curvarum rationalium proprietates ab æquationum naturâ immediatè fluentes.

P R O P. I X. P R O B L.

*Invenire numerum punctorum quæ determinant
lineam alicujus ordinis.*

Linea quævis describi potest per tot puncta, quot sunt coefficientes in æquatione generalissimâ eam definiente et non plura; ut constat ex methodo *D. Newtoni* universali describendi curvas per data totidem puncta quot eas determinant: cujus specimen dedit in sectionibus conicis ad algebrae suæ problemata 54, 57. Et hactenùs annotatum est, quod existente n numero dimensionum curvæ, erit $\frac{n^2 + 3n}{2}$ numerus coefficientium in æquatione generalissimâ lineas omnes alicujus ordinis definiente; et proinde etiam erit $\frac{n^2 + 3n}{2}$ numerus punctorum determinantium curvam cujus dimensio est n .

Itaque recta determinatur ex duobus punctis, sectio conici ex quinque; Linea tertii ordinis ex novem, Linea quarti ex quatuordecim et sic porro.

Coroll. 1. Ex dato numero punctorum determinantium dabitur dimensio curvæ. Sit enim m punctorum numerus, et erit

$$m = \frac{n^2 + 3n}{2} \text{ undè et vicissim invenies}$$

$$n = \frac{-3 + \sqrt{(8m + 9)}}{2}. \text{ Ut si esset } m = 20,$$

invenies $n = 5$.

Coroll. 2. Ex hâc propositione invenies numerum punctorum quæ determinant lineam aliquam particularem, si possibile sit; sunt enim quædam lineæ quas nullus punctorum numerus determinat.

Exempla.

1. Sit $y = ax + b \pm \sqrt{(cx + d)}$ æquatio generalissima ad Parabolam conicam: quum igitur quatuor tantum sunt coefficientes, Parabola determinatur ex quatuor punctis. Quatuor puncta non sufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipsin, sed quinque nimia sunt.

2. Item sectio conici cujus datur diameter; et angulus ordinarum, determinatur ex tribus punctis, parabola ex duobus; duo non sufficiunt ad determinandam hyperbolam aut Ellipsin, sed tria nimia sunt.

3. Hyperbola conica, datâ positione ejus Asymptoto, determinatur ex quatuor punctis.

4. Parabola conica, datâ positione ejus axe; determinatur ex tribus punctis.

5. Parabolæ quinque *divergentes*, datâ plagâ crurum, determinantur ex sex punctis; parabola *Cartesii* ex quinque; parabola cubica ex quatuor.

P. R O P. X. T H E O R.

Ducantur duæ rectæ parallelæ secantes curvam in tot punctis quot ipsa est dimensionum; recta quæ ita secat has parallelas ut summæ partium ex uno ejus latere consistentium et ad curvam terminatarum æquetur summæ partium ex altero ejus latere consistentium ad curvam itidem terminatarum, ita etiam secabit omnes rectas hisce parallelas.

Sit enim curvæ alicujus abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$, æquationis relationem inter x et y definiens terminus secundus sit $(ax + b)y^{n-1}$: sume in rectâ AB , $AF = \frac{-b}{a}$

et ordinatæ parallelam $AE = \frac{-b}{n}$; junge EF ;

si ea sumatur pro abscissâ, dico summam ordinarum ex unâ ejus parte æquari summæ ordinarum ex alterâ parte:

Nam sit $y^n + (ax + b)y^{n-1} + \&c. = 0$, æquatio exprimens relationem inter x , y . Producat CB (*fig. 18.*) secans FE in D et sit abscissa nova $ED = z$, Ordinata nova

$DC = v$: ponatur $AB : ED :: A : 1$, id est
 $x : z :: A : 1$, undè $x = Az$.

$FA : AE :: FB : BD$, vel $\frac{-b}{a} : \frac{-b}{n} ::$

$$Az + \frac{b}{a} : BD = \frac{aAz + b}{n} \quad BC =$$

$$= DC - DB = v - \frac{aAz + b}{n} = y,$$

undè (per Theor. *D. Newtoni*) $y^n = v^n -$
 $(aAz + b)v^{n-1}$ &c. $y^{n-1} = v^{n-1}$ &c. Hosce
 valores substitue in æquatione

$$y^n + (ax + b)y^{n-1} + \&c. = 0,$$

et videbis v^{n-1} evanescere, id est, æquationis
 terminum secundum deesse: igitur valores
 ipsius x erunt partim negativi et partim affir-
 mativi, et summa affirmativorum æquabitur
 summæ negativorum: vel, quod perindè est,
 æquentur summæ Ordinatarum ex Abscissâ
 ad Curvam in easdem partes extensarum.
 Q. E. D.

Recta quæ ita secat ordinatas appellatur
 Curvæ diameter.

Coroll. 1. Duc rectas duas parallelas secan-
 tes Lineam secundi ordinis in duobus punc-
 tis, recta quæ has bisecat, bisecabit omnes
 illis parallelas. Adeoque æquatio $y^2 = ax^2 +$
 $bx + c$ designat omnes lineas secundi ordinis.

Coroll. 2. Duc rectas duas quasvis parallelas,

secantes Lineam tertii ordinis in tribus punctis; recta quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium ex uno ejus latere consistentium, et ad curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ, ex altero ejus latere consistenti, et ad curvam terminatæ, ita etiam secabit omnes rectas hisce parallelas.

Coroll. 3. Duc rectam DF (*fig. 19.*) secantem lineam secundi ordinis in duobus punctis B, E , ejusque duas Asymptotos in aliis duobus D, F ; dico partes illius rectæ interceptas inter Asymptotos et earum crura sibi invicem æquari. Duc diametrum CA bisecantem BE omnesque rectas illi parallelas. Quia curva coincidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam, cocunt in illo casu puncta B, D ; E, F : adeoque diameter bisecat ordinatas in Asymptotis terminatas in distantia infinitâ: undè per naturam rectæ in omni distantia eas bisecabit, hoc est, ubique $AD = AF$, sed $AB = AE$, ergo $BD = EF$.
Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam FH (*fig. 20.*) secantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis E, D, H ; ut et tres ejus Asymptotos in tribus aliis F, C, G ; dico FE ; GH partes duas hujus rectæ inter Asymptotos et crura interceptas et ab Asymptotis ad curvam in

easdem plagas extensas æquari parti tertiæ CD inter Asymptoton tertiam et ejus crus interceptæ, et ab Asymptoto ad curvam in oppositas plagas extensæ. Ducatur enim Diameter AB quæ ita secat Ordinatas, ut sit $BD + BE = BH$; quoniam in distantia infinitâ Asymptoti coincidunt cum suis cruribus, coeuntibus punctis $F, E; C, D; G, H$; Diameter AB ita etiam secabit ordinatas in Asymptotis terminatas in distantia infinitâ ut sit $BC + BF = BG$: at si hoc accidat in qualibet distantia, accidet in omni, ergo est universaliter $BC + BF = BG$, sed $BD + BE = BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD - BC + BE - BF = BH - BG$, hoc est, $CD - EF = GH$, vel $CD = EF + GH$. Q. E. D.

Eâdem facilitate simile demonstratur de curvis superiorum ordinum.

Scholion.

Hanc propositionem demonstravi considerando coefficientem termini secundi esse summam omnium radicum sub signis propriis collectam. Coefficientens tertii termini est factum sub singulis duabus radicibus, coefficientens quarti sub singulis tribus, quinti sub singulis quatuor, et sic in infinitum. Undè facillimè sequitur series theorematum sequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ secantes lineam tertii vel superioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimensiones : sectio conica vel linea recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa rectangulorum sub partibus earum inter curvam et sectionem conicam vel rectam interceptis, et à curvâ ad sectionem conici vel rectam in eadem plagas extensis, æquetur summæ rectangulorum sub partibus earumdem parallelarum ad alteras sectionis conici vel rectæ plagas à curvâ extensis, et in curvâ terminatis, ita secabit omnes rectas hisce parallelas.

2. Ducantur novem parallelæ secantes curvam quarti vel superioris ordinis in tot punctis quot curva est dimensionum. Ducatur linea tertii vel inferioris ordinis secans has novem parallelas : et si componantur Parallelepipeda sub singulis tribus partibus harum parallelarum inter curvam et lineam tertii vel ordinis inferioris interceptis : atque in unaquaque novem parallelarum, si parallelepipeda quæ prodeunt affirmativa, æqualia deprehendantur iis quæ prodeunt negativa ; idem accidet in omnibus rectis prioribus novem parallelis. Et sic porrò.

Hæ Lineæ quæ ita secant parallelas, tanquam curvarum diametri, (ut ita dicam) quodammodo considerari possunt.

PROP. XI. THEOR.

Sit $AEBD$ (fig. 21.) *Linea secundi ordinis, quam secet recta AB in duobus punctis A, B ; ut et recta DE in duobus aliis D, E , harum concursus sit C . Dico esse $AC \times CB$ ad $DC \times CE$ in ratione datâ; modo detur rectarum AB, DE inclinatio ad se invicem.*

Supponamus enim Abscissam $AC = x$, et rectarum DC, CE quamlibet ambigue designare ordinatam y : atque Curva hujusmodi æquatione $y^2 + (ax + b)y + cx^2 - dx = 0$, designabitur, in quâ quantitas determinata non reperietur, quoniam principium Abscissæ est in curvâ. Ut inveniatur AB , sit $y = 0$, et evanescent termini in quibus ea reperitur, atque erit $cx^2 - dx = 0$, undè in illo casu est $x = \frac{d}{c} = AB$, ergo $AB - AC = \frac{d}{c} - x = BC$:

cujus signum mutetur quoniam puncta A, B jacent ad partes puncti C contrarias, et erit $BC = x - \frac{d}{c}$ Et indè $AC \times BC = x^2 - \frac{dx}{c}$.

Constat verò per naturam æquationum, terminum ultimum in quo radix non reperitur, esse factum sub omnibus radicibus; hoc est $DC \times CE = cx^2 - dx$, et hoc rectangulum

est ad $AC \times CB = x^2 - \frac{dx}{c}$ ut c ad unitatem: at servatâ rectarum AB, DE inclinatione ad invicem, non mutabitur quantitas c , ergo neque dicta ratio facti $AC \times CB$ ad $DC \times CE$. Q. E. D.

Ex hac propositione tanquam totidem corollaria fluunt omnia, quæ tradere solent auctores de sectionum conicarum diametris, verticibus, lateribus rectis et transversis, et ratione contentorum sub parallelarum segmentis.

PROP. XII. THEOR.

Sit AFG (fig. 22.) Linea tertii ordinis, quam secet recta AD in tribus punctis A, B, D, ut et FG in tribus aliis F, G, H; harum concursus sit C. Dico esse $AC \times BC \times DC$ ad $FC \times GC \times HC$ in ratione datâ; modo detur rectarum AD, FG ad se invicem inclinatio.

Ponamus esse Abscissam $AC = x$, et rectarum CF, CH, CG quamlibet ambigue designare ordinatam y : et curva hujusmodi æquatione designabitur $y^3 + (ax + b)y^2 + (cx^2 + dx + e)y = fx^3 - gx^2 + hx$; ubi quantitas data non reperietur propterea

quod initium Abscissæ est in curvâ. Sit $y=0$, atque erit $fx^3 - gx^2 + hx = 0$, undè in illo casu

$$\text{est } x = \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ hoc est}$$

$$AB = \frac{g}{2f} - \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ et}$$

$$AD = \frac{g}{2f} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}; \text{ ergo}$$

$$BC = x - \frac{g}{2f} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ et}$$

$$CD = x - \frac{g}{2f} - \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)} \text{ cum}$$

signo mutato. Undè est

$$AC \times BC \times DC = x^3 - \frac{gx^2}{f} + \frac{hx}{f}$$

Sed per naturam æquationum est

$$FC \times HC \times GC = fx^3 - gx^2 + hx;$$

ideoque solidum prius est ad posterius ut unitas ad f : at servatâ inclinatione rectarum AD , FG , dabitur quantitas f ; ergo etiam dicta ratio solidi $AC \times BC \times CD$ ad $FG \times GC \times HC$.
Q. E. D.

Hinc tam facile consequuntur ea quæ tradidit *D. Newtonus* de Linearum tertii ordinis diametris, verticibus, lateribus rectis et transversis, ratione contentarum sub parallelarum segmentis, atque alia plurima; ut eadem pleniùs ostendere necessarium haud duxerim.

Sufficiat hîc obiter annotare, quod hâc methodo universali procedendo, scilicet argumentando à naturis æquationum, patescunt non solùm sectionum conii proprietates, quas tanto labore adinvenerunt Veteres, et tot ambagibus demonstratas dederunt, idque methodo quæ ad alias curvas extendi hæquit; sed et proprietates curvarum omnium ordinum superiorum.

Hisce præmissis, pergerem ad Enumerationem linearum tertii ordinis, sed ob rei analogiam enumerare licet eas secundi. Hæ (per *Coroll. 1. Prop. 10.*) reducuntur omnes ad æquationem $y^2 = a x^2 + b x + c$; quæ æquatio, ut statim apparebit, designat Hyperbolam, Ellipsin aut Parabolam, prout terminus $a x^2$ affirmativus est, negativus vel nullus.

Enumeratio Linearum secundi ordinis.

PROP. XIII. THEOR.

Æquatio $y^2 = a x^2 + b x + c$ designat figuram habentem quatuor crura infinita ad duas Asymptotos rectas jacentia.

Liquet ferè hæc propositio ex *Exemplo primo Scholii Prop. 8.* sed argumento magis distincto sic evincitur.

Augeatur x in infinitum (*fig. 23.*), et duo

valores ordinatæ y hinc indè æquales etiam augebuntur in infinitum; quare figura habet duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x , hoc est, sumatur abscissa ad alteras partes, et æquatio erit hæc $y^3 = ax^3 - bx + c$, ubi patet quod augendo x in infinitum, etiam augebitur y in infinitum: nam terminus affirmativus ax^3 erit omnibus reliquis multò major, modo x sit admodum magna: quare curva habet alia duo crura, et omnino quatuor.

Reducatur y in seriem hujusmodi convergentem $y = \pm x \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{4ac - b^2}{8ax\sqrt{a}} \&c.$

Undè (per *Prop.* 6.) ordinata Asymptoti erit $\pm x \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Igitur pro Asymptotis habet

hæc curva duas rectas ex Abscissâ hinc indè æqualiter jacentes. Nam sume $AD = \frac{-b}{2a}$,

in Abscissâ; per initium Abscissæ duc dA^d ordinatæ parallelam, in quâ sint Ad, A^d , æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ad contrarias puncti A partes sumptæ; junge Dd, D^d , erunt illæ duæ Asymptoti. Ideoque figura habet quatuor crura hyperbolica ad duas rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si b^2 majus sit $4ac$, crura jacent in angulis EDe , FDG ; sin minus, jacent in angulis hisce deinceps: ut constat ex *Coroll. 2. Prop. 6.*

Coroll. 2. Hæc figura (per *Coroll. 1. Prop. 4.*) ejus Asymptotos non decussat, adeoque (per *Coroll. 2. Prop. 1.*) crura quæ in eodem angulo jacent, ductu continuo semper conjunguntur.

Coroll. 3. Undè hæc figura semper constat ex hyperbolis duabus inscriptis, in Asymptoton angulis oppositis jacentibus; et proindè unicam tantùm speciem constituit. Quæ est species prima Linearum secundi ordinis.

Coroll. 4. Si terminus ax^2 sit negativus, curva nequit excurrere in infinitum; ergo (per *Prop. 1.*) in se redit; et constat ex ovali unicâ, (*fig. 24.*). Quæ est species secunda. Hoc *Corollarium* facillimè colligitur ex *primo Exemplo Scholii propositionis octavæ.*

PROP. XIV. THEOR.

Si desit terminus ax^2 , æquatio $y^2 = bx + c$ designat figuram habentem duo tantùm crura infinita parabolica in eandem plagam extensa.

Patet enim quod augendo Abscissam x in infinitum (*fig. 25.*), simul augebuntur ordi-

natae y valores, ergo curva habet duo crura infinita, et in eandem plagam protensa; quoniam existente x infinitè magna, ordinata y est eadem infinitè minor. Quod si mutetur signum ipsius x , æquatio evadet $y^2 = -bx + c$; postquam ergo eousque augetur x ut sit $bx = c$; curva ad illas partes ulteriùs pergere nequit, quia erit quadratum ordinatae negativa quantitas, et indè ordinata ipsa impossibilis. Igitur curva habet duo tantùm crura. Per methodum serierum est

$$y = \pm \sqrt{bx} \pm \frac{c}{2\sqrt{bx}} + \&c.$$

Undè (per *Prop. 6.*) \sqrt{bx} est ordinata Asymptoti ad Abscissam x pertinens, quumque hæc non sit ordinata rectæ, crura sunt Parabolica. Q. E. D.

Coroll. Crura hujus curvæ sunt sui generis simplicissima. Hæc figura constituit Linearum secundi ordinis speciem tertiam; et patet eas esse tres conic sectiones.

Enumeratio Linearum tertii Ordinis.

PROP. XV. THEOR.

Omnes Lineæ tertii ordinis, reducuntur ad hos æquationum casus quatuor

$$x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

$$x y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

$$\text{et } y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Æquatio $(z + a) v^2 = (b z^2 + c z + d) v + e z^3 + f z^2 + g z + h$ (per Coroll. 1. Prop. 5.) comprehendit omnes lineas secundi ordinis: undè, si probavero illam æquationem semper reduci posse ad unam quatuor dictarum formarum, constabit propositio.

Cas. 1. Si æquationis terminus nullus desit, divide eam per $z + a$ coefficientem ipsius v^2 , et erit

$$v^2 = \frac{(b z^2 + c z + d) v + e z^3 + f z^2 + g z + h}{z + a}$$

atque extrahendo radicem $v = \frac{b z^2 + c z + d}{2 z + 2 a} + p$,

ubi p . est latus quadratum partis valorum ipsius v vinculo quadratico inclusæ. Sit $AB = z$, (fig. 26.) BDC ordinata secans curvam in duobus punctis, adeoque rectorum BD, BC

quamlibet ambigè representat ordinata v : id est :

$$BC = \frac{b\zeta^2 + c\zeta + d}{2\zeta + 2a} + p, \quad BD = \frac{b\zeta^2 + c\zeta + d}{2\zeta + 2a} - p.$$

Harum differentia $CD = 2p$. Biseca CD in F , ut sit $DF = p$, huic adde BD , et erit

$$BF = \frac{b\zeta^2 + c\zeta + d}{2\zeta + 2a}, \text{ quæ est ordinata Li-}$$

næ bisecantis ordinatas ad curvam terminatas : quæque in casu præsentis est hyperbolica. Sit ca KF , ejusque Asymptoti GE , GH ; quarum hæc parallela est ordinatæ DC , propterea quod ordinata EF secat hyperbolam in unico puncto F . Sume Abscissam novam $GE = x$, ordinatam novam EC vel $ED = y$; eritque $EC = CF + FE$, $ED = CF - FE$, vel more algebraico, $y = EF \pm EC$.

Undè in æquatione ad curvam, $2EF$ erit coefficientis ipsius y , ut constat ex naturâ æquationis Quadraticæ. Jam sit e data quantitas, et ex naturâ hyperbolæ erit $EF = \frac{e}{2x}$; ergo $\frac{e}{x}$ erit coefficientis ipsius y in æquatione curvam definiente : atque exindè æquatio necessariò inducet hanc formam

$$y^2 - \frac{ey}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} \text{ vel}$$

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d. \text{ Q. E. D.}$$

Cas. 2. Quod si desit terminus τv^3 , æquatio erit hujusmodi

$$a v^3 = (b\tau^2 + c\tau + d)v + e\tau^3 + f\tau^2 + g\tau + h:$$

et erit $BF = \frac{b\tau^2 + c\tau + d}{2a}$, quæ est Ordinata

parabolæ conicæ bisecantis ordinatas. Si quando hoc accidat mutetur Abscissa τ in ordinatam v , et æquatio erit

$$v^3 + (a\tau + b)v^2 + (c\tau + d)v = e\tau^3 + f\tau^2 + g;$$

tolle terminum v^3 (per *Coroll. 4. Prop. 5.*) et æquatio erit

$$(a\tau + b)v^2 + (c\tau + d)v = e\tau^2 + f\tau + g:$$

quæ (per *Cas. 1.*) convertitur in hanc

$$xy^2 - ey = bx^2 + cx + d,$$

et hæc forma continetur in priori

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d. \text{ Q. E. D.}$$

Cas. 3. Si desint termini av^3 , dv , erit

$$BF = \frac{b\tau^2 + c\tau}{2\tau} = \frac{b\tau + c}{2},$$

quæ est ordinata

rectæ bisecantis ordinatas. In illo casu sume abscissam x in rectâ illâ bisecante à debito initio computatam, et ordinatam y priori v parallelam; et æquatio induet hanc formam $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, quæ continetur in priori. Q. E. D.

Cas. 4. Si desint termini τv^3 , av^3 , restabit $(b\tau^2 + c\tau + d)v = e\tau^3 + f\tau^2 + g\tau + h$, quo in casu ordinata occurrit curvæ in unico

tantum puncto. Tolle terminum $e z^3$ (per *Coroll. 4. Prop. 5.*) et æquatio erit

$$(b z^3 + c z + d) v = f z^2 + g z + h:$$

hæc æquatio, mutando abscissam z in ordinatam v , convertetur (per *Cas. 1.*) in hanc $x y^2 - e y = c x + d$, quæ continetur in formâ $x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 5. Si desint termini $z v^2$, $a v^2$, $b z^2 v$, manebit $c z v + d v = e z^3 + f z^2 + g z + h$, ubi si pro v scribas y , et $x - \frac{d}{c}$ pro z , orietur $x y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 6. Si desint termini $z v^2$, $b z^2 v$, erit $B F = \frac{c z + d}{2 a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas CD ; in illo casu sume abscissam x in rectâ illâ bisecante, et ordinatam v priori parallelam, et prodibit $y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 7. Si desint termini $z v^2$, $a v^2$, $b z^2 v$, $c z v$, restabit $d v = e z^3 + f z^2 + g z + h$, quæ est hujus formæ $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Reducuntur ergo omnes Lineæ tertii ordinis ad quatuor sequentes æquationum casus,

$$\left. \begin{array}{l} xy^2 - ey \\ xy \\ y^2 \\ y \end{array} \right\} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ut oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Æquatio $xy^2 - cy = ax^3 + bx^2 + cx + d$
designat figuram habentem sex crura hyper-
bolica ad tres Asymptotos jacentia.

Sit $AB = x$, $BC = y$. Invenies

$$y = \frac{e}{2x} + \sqrt{\left(ax^3 + bx^2 + cx + \frac{d}{x} + \frac{e^2}{4x^2} \right)};$$

reducatur (per *Theor. Newtoni*) pars irration-
nalis in seriem $\frac{e}{2x} + \frac{d}{e} \&c.$, eò citiùs con-
vergentem, quo minor est x ; atque prove-
nient ordinatæ valores $\frac{e}{x} + \frac{d}{e} \&c. - \frac{d}{e} \&c.$

Valor hic ultimus indicat curvam secare or-
dinatam primam, puta in *G*. (*fig. 27.*). Valor
autem ille $\frac{e}{x} + \frac{d}{e} \&c.$ indicat (per *Coroll.*

Prop. 7.) ordinatam primam esse Asympto-
ton, et habere duo crura ad diversas ejus
partes posita, et in plagas oppositas tendentia.
Evadat jam x utcunque magna et augebuntur

simul ordinatæ valores sine limite, quare curva habet alia duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x , et æquatio evadet

$$-xy^2 - ey = -ax^3 + bx^2 - cx + d \text{ vel } xy^2 + ey = ax^3 - bx^2 + cx - d, \text{ ubi patet}$$

quod etiamnum augeri potest x in infinitum et simul augebuntur ordinatæ valores, nunquam enim evadent impossibiles quum abscissa est satis magna. Undè figura habet alia duo crura et omnino sex.

Reducatur jam y in seriem eo citius convergentem quo major est x , atque invenietur

$$BC = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 + 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} + \&c.$$

$$Bc = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} + \&c.$$

Habet igitur (per *Prop. 6.*) figura duas Asymptotos rectas ab Abscissâ hinc indè æqualiter jacentes: nam sit $AD = \frac{b}{2a}$, et $Ad, A\delta$,

hinc indè æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, junge $Dd, D\delta$ erunt

illæ duæ Asymptoti. Ergo figura habet sex crura ad tres Asymptotos rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si desit terminus $b x^2$, tres Asymptoti, evanescente triangu'o $Dd\delta$, in uno eodemque puncto conveniunt.

Coroll. 2. Si figura Ovalem conjugatam habeat, ea semper continetur intrà triangulum, $Dd\delta$; nam si consisteret extrà, duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Idem intellige de Nodo, Cuspide et puncto conjugato. Ut enim punctum est Ovalis infinite parva, sic Cuspis est Nodus infinite parvus.

Coroll. 3. Ergo si desit terminus bx^2 , hoc est, si tres Asymptoti in uno eodemque puncto conveniunt, figura nunquam habet ovalem, nodum, cuspidem aut punctum conjugatum: quia (per *Coroll. 1, 2.*) evanescit triangulum intra quod semper consistit ovalis, nodus, cuspis vel punctum conjugatum.

Coroll. 4. Duc δMO bisecantem Dd , in M , item OP Asymptoto Dd parallelam secantem curvam in P . Sitque abscissa $MO = z$, ordinata $OP = v$; et eadem ratione, quâ existente $AB = x$, $BC = y$, prodit

$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
prodibit etiam

$$zv^2 - Ev = Az^3 + Bz^2 + Cz + D.$$

Et si ducatur dNQ bisecans $D\delta$ in N , et QR Asymptoto $D\delta$ parallela, curvam secans in R , et sit $NQ = s$, $RQ = t$, orietur $st^2 - et = as^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta$. Qui de hisce dubitat utatur calculo.

Coroll. 5. Unde si æquationis

$$x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

desit terminus $b x^2$, in æquationibus duabus reliquis deerunt termini respectivi $B \alpha^2$, βs^2 . Et contrà, ut constat ex *Coroll. 1.*

Coroll. 6. Si desit terminus $e y$, Abscissa est diameter bisecans Ordinatæ: et contrà, si AB sit Diameter, deest terminus $e y$. Simile intellige de abscissis MO , NQ earumque Ordinatæ.

Coroll. 7. Si desit terminus $e y$, curva non decussat Asymptoton d^{δ} ; nam existente x infinite parva erit $y = \pm \sqrt{\frac{d}{x}}$, adeoque (per

Coroll. 3. Prop. 7.) crura jacent ad eandem Asymptoti d^{δ} partes et in plagas oppositas feruntur: et inde (per *Coroll. 4. Prop. 4.*) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum; adeoque nullum restabit punctum in quo curva decussare potest ejus Asymptoton. Et contrà, si curva non decussat Asymptoton, deest terminus $e y$ et abscissa AB est diameter, atque crura jacent ad eandem Asymptoti d^{δ} partes, in plagas oppositas lata. Simile intellige de Asymptotis duabus reliquis cum Abscissis δO , $d Q$.

Coroll. 8. Si sit $b^2 - 4ac = 4ae\sqrt{a}$, curva non decussat Asymptoton Dd , adeo-

que (per *Coroll.* 7.) *MO* est diameter. Nam est

$$AB = x, BC = y, BE = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}};$$

quod si curva secaret Asymptoton *Dd*, erit in illo casu $BE = BC$, id est

$$y = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}. \text{ In æquatione pro } y \text{ sub}$$

stitue hunc valorem, et invenies

$$x = \frac{4ad + 2bc\sqrt{a}}{b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a}} = AL,$$

ubi *LK*, est Ordinata transiens per *K* punctum intersectionis. Jam sit

$$b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a} = 0,$$

vel $b^2 - 4ac = 4ae\sqrt{a},$

et erit *AL* infinite magna, adcoque punctum intersectionis nullibi erit. Similiter si *F* sit punctum in quo curva secat Asymptoton *Dd*, et *FH* ordinata; erit

$$AH = \frac{4ad - 2bc\sqrt{a}}{b^2 - 4ac + 4ae\sqrt{a}}, \text{ unde si sit}$$

$b^2 - 4ac = -4ae\sqrt{a}$, curva non decussat Asymptoton *Dd*, et est *NQ* diameter.

Coroll. 9. Ergo si neque terminus *ey* desit, neque sit $b^2 - 4ac = \pm 4ae\sqrt{a}$, curva nullam habebit diametrum; sin eorum alterutrum accidit, curva unicam habebit diametrum et tres, si utrumque. Sciendum enim est Ordi-

natas bisectas esse alicui Asymptoto parallelas, ut constat per conversum *Prop. 5.* ejusque *Scholion*; et diametrum semper bisecare Ordinatas in Asymptotis terminatas, quia curva coïncidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam: adeoque Diametrum transire per intersectionem duarum Asymptoton necesse est.

Coroll. 10. Igitur hæc curva vel habet nullam, unam vel tres Diametros: duas enim solas habere nequit.

Coroll. 11. Curva quæ nullam habet diametrum, secat tres ejus Asymptotos, singulam in unico puncto.

Coroll. 12. Curva quæ unicam habet diametrum decussat duas Asymptotos, per quarum intersectionem transit illa diameter: at tertiam non secat.

Coroll. 13. Curva quæ tres habet diametros Asymptoton nullam omnino secabit.

Coroll. 14. Si $b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos DE jacet inter curvam et Abscissam; sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton et Abscissam. Et si $b^2 - 4ac + 4ae\sqrt{a}$ sit affirmativa quantitas, Asymptotos De jacet inter curvam et Abscissam, sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton et Abscissam.

Coroll. 15. Si desit terminus ey , id est, si AB sit diameter, et sit $b^2 - 4ac$ quantitas affirmativa, curva continet Asymptotos $Dd, D\delta$ in suo sinu. At si quantitas illa sit negativa, Asymptoti jacent extrà crura adjacentia.

Coroll. 16. Si figura habet tres diametros, et sit d quantitas affirmativa, crura jacent extrà Asymptotos; sin minus intrà. Corollaria hæc tria ultima constant ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 17. Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

terminus ax^3 sit negativus, figura habebit duo tantum crura Hyperbolica ad ordinatam primam jacentia. Nam series $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} + \&c$

ex cujus possibilitate pendent reliqua quatuor crura cum earum Asymptotis erit impossibilis. Constat etiam hoc *Corollarium* ex *Exemplo tertio Scholii Prop.* 7.

Notandum est in hæc propositione ejusque Corollariis per diametrum semper intelligi diametrum quæ bisecat Ordinatam duarum dimensionum.

Postquam compertus est numerus crurum alicujus curvæ, ejus species enumerantur determinando quæ crura ductu continuo conjunguntur; ut et describendo Ouales, Nodos,

Cuspides et puncta conjugata si quæ sint. Hæc omnia ex propositionibus præcedentibus facillime perficiuntur.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ novem sequuntur, sex cruribus, ad tres rectas triangulum capientes, jacentibus præditi; quæ diametro ad ordinatas duarum dimensionum destituuntur. *Vide figuras in Enumeratione Newtonianâ Linearum tertii ordinis.*

Si æquationis

$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
extrahatur radix y , inveniatur

$$y = \frac{e}{2x} + \frac{\sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2)}}{x},$$

patet ergo ordinatam possibilem esse, quando quantitas $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$, vinculo quadratico inclusa, est affirmativa, et impossibilem quando negativa: vices autem possibilitatis et impossibilitatis innotescunt per *Exemp. 3. Prop. 8.* describendo Parabolam cujus abscissa est x et ordinata

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2.$$

Species I. Fig. 5, 7.

Si æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$$

radices omnes AP , $A\varpi$, $A\pi$, Ap sint reales ejusdem signi et inæquales, figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptâ, circumscriptâ, et ambigenâ. Nam (per *Exemp 3. Prop. 8.*) ordinata inter puncta P , ϖ vel π , p erecta est imaginaria, et realis erit ordinata alio quovis abscissæ puncto insistens. Erige ordinatas PT ; $\varpi\tau$, π^1 , $p t$, et hæ tangent curvam in totidem punctis T , τ , 1 , t : etenim in illo casu ordinarum vel summa vel differentia evanescit, prout ad diversas vel easdem Abscissæ partes extenduntur. Unde puncta T , τ , 1 , t , sunt limites possibilitatis et impossibilitatis, atque adeo intra medios limites τ , 1 continetur Ovalis Crura vero quæ jacent ad angulum D conjunguntur: quoniam ordinata inter p , π erecta non occurit curvæ. Sed et crura quæ jacent ad angulos d , δ etiam conjunguntur; aliter enim, si fieri potest, conjungantur, et duci poterit recta per Ovalem secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Ex supradictis abunde patet quod crura semper jacent ad diversas Asymptoti partes; et quod Hyperbola Conica bisecat ordinatas duarum

TAB. I. dimensionum; ex quarum consideratione necessariò sequitur Hyperbolarum unam esse inscriptam, alteram circumscriptam, et tertiam ambigenam: quæ est Species prima.

Species II. Fig. 8, 9.

Si ex radicibus duæ maximæ $Ap, A\pi$, (*fig. 8.*) vel duæ minimæ $AP, A\varpi$ (*fig. 9.*) sint æquales, Ovalis tangit Hyperbolam circumscriptam, et tangendo evadit nodus, atque Hyperbola, nodata; adeoque figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptâ, nodatâ et ambigenâ: quæ est Species secunda.

Species III. Fig. 10, 11.

Si radices tres maximæ (*fig. 10.*) vel tres minimæ (*fig. 11.*) inter se æquentur, nodus evadit infinite parvus, id est, cuspis, et figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptâ, cuspidatâ et ambigenâ: quæ est Species tertia.

Notandum est crura Hyperboe nodatæ semper esse versus se invicem convexa; aliter enim duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis. Idem intellige de cuspidatâ, siquidem cuspis nihil aliud est quam nodus infinite parvus.

Species IV. Fig. 12.

TAB. I.

Si è radicibus duæ mediæ æquentur (*fig. 12.*) Ovalis, quæ in specie primâ obtinebat, evadit infinite parva, id est, punctum. Et figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ cum puncto conjugato : quæ est Species quarta.

Species V, VI. Fig. 12, 13, 14, 15.

Si è radicibus duæ mediæ sint impossibiles, et reliquæ duæ inæquales et ejusdem signi (nam contraria habere nequeunt) impossibile erit itidem curvam habere ovalem, nodum, cuspidem aut punctum conjugatum; adeoque figura erit pura constans ex Hyperbolis tribus inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ. Si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $Dd\delta$, (*fig. 12, 13.*) Species est quinta; sin jaceant ad latera ejusdem (*fig. 14, 15.*) Species est sexta.

Species VII, VIII. Fig. 16, 17, 18, 19. TAB. II.

Si è radicibus duæ sint æquales, et alteræ duæ vel impossibiles (*fig. 16, 18.*) vel possibiles (*fig. 17, 19.*) cum signis quæ à signis æqualium radicum diversa sunt, quatuor crura in uno puncto conveniunt; scilicet Hyper-

TAB. II. bolæ quæ in speciebus quintâ et sexta erant circumscriptæ et ambigenæ nunc constituunt cruciformem. Adeoque figura constat ex inscriptâ et cruciformi. Quod si jaceat inscripta ad angulum trianguli $D d^s$ (*fig.* 16, 17.) Species est septima. At si jaceat ad latus (*fig.* 18, 19.) Species est octava.

Species. IX. Fig. 20, 21.

Si radices omnes sint impossibiles (*fig.* 20.) vel si omnes sint reales (*fig.* 21.) et earum duæ negativæ sint et alteræ duæ affirmativæ, Hyperbolæ quæ in speciebus septimâ et octavâ conjungebantur et constituiebant cruciformem ab invicem iterum separantur; et figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis in angulis Asymptotôn oppositis jacentibus, cum angineâ circa tertiam Asymptoton flexâ: quæ est Species nona.

Si radices duæ æquentur et duæ reliquæ etiam æquentur, figura migrat in sectionem Conicam cum lineâ rectâ. Nam

$\sqrt{(a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2)}$
erit quantitas rationalis, et inde æquatio $x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d$ bipartitur in duas æquationes, quarum una designat Hyperbolam Conicam, altera rectam.

Hi sunt casus omnes possibles radicum æquationis

quationis $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2$ propterea quod $\frac{1}{4} e^2$ terminus ultimus est affirmativus, quippe quadratum realis quantitatis. Ut vero hoc melius intelligatur, casus unius impossibilitatem ostendam, cujus ad exemplum reliquorum impossibilitas facillime evincitur.

Si æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0,$$

radices tres idem habeant signum, dico quartum diversum habere non posse.

Describatur Parabola æquatione

$$z = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2$$

designata; quoniam æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$$

quatuor radices ponuntur reales, Abscissa secat curvam in quatuor punctis: ea sunt $A, B, C, D.$ (*fig. 12.*) Jam si fieri possit, sit principium Abscissæ inter puncta A, B adeo ut radix $E A$ sit negativa et reliquæ tres affirmativæ: sit $E F$ Ordinata prima; et existente $x = 0$, erit $y = \frac{1}{4} e^2 = E F$: sed $E F$ est quantitas negativa, ergo etiam $\frac{1}{4} e^2$ quantitas negativa, quod est absurdum. Similiter ostendetur quod principium Abscissæ jaccere nequit inter puncta C, D , quoniam ordinatæ ad Abscissæ partem $C D$ erectæ sunt omnes negativæ. Igitur constat propositum;

nam si tres radices eadem habent signa, et quarta diversum: principium Abscissæ vel erit inter puncta *C, D* vel *A, B*. Sed cum hoc fieri nequit, neque illud fieri potest.

Eodemque modo ostenditur, quod si æquationis $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$ radices duæ sint impossibiles, reliquæ duæ idem signum habebunt.

Hyperbolæ quatuordecim cum sex cruribus ad tres Asymptotos triangulum capientes jacentibus, unicam habentes Diametrum ad Ordinatas duarum dimensionum.

Si desit terminus *e y* figura habet Diametrum ad ordinatas duarum dimensionum, scilicet Abscissam: et æquatio erit

$$x y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

TAB. II. *Species X, XI. Fig. 22.*

Si æquationis $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$ radices omnes sint reales, ejusdem et signi inæquales; figura constat ex tribus Hyperbolis ad tres angulos trianguli *D d s* jacentibus cum Ovali intra triangulum consistenti. Nam sint tres radices *A τ, A 1, A t*, et erunt *T, 1, t*, limites possibilitatis et impossibilitatis (per *Exemp. 2. Prop. 8.*) atque intra *τ, t* continentur Ovalis. Crura verò, quæ ad eodem an-

gulos trianguli $D d^{\delta}$ jacent, conjungi, eodem **TAB. II.**
modo ostenditur, quo in specie primâ. Si
Asymptoti $D d$, D^{δ} jaceant intra crura (*fig.*
22.) curva constat ex tribus Hyperbolis, dua-
bus inscriptis ad d , δ et circumscriptâ ad D :
quæ est species decima.

Sin Asymptotos jaceant extra crura, figura
constat ex tribus Hyperbolis, inscriptâ ad D ,
et ambigenis duabus ad d , δ : quæ est Species
undecima.

Species XII. Fig. 23.

Si radices duæ maximæ $A t$, A^1 æquentur,
Ovalis tangit Hyperbolam circumscriptam,
et tangendo evadit nodus, atque Hyperbola
nodata; et figura constat ex Hyperbolis dua-
bus inscriptis ad d , δ cum nodatâ ad D : quæ
est Species decima secunda.

Species XIII. Fig. 24.

Si radices tres æquentur, nodus evadit cus-
pis, et curva constat ex Hyperbolis duabus
inscriptis ad d , δ , et cuspidata ad D : quæ
est Species decima tertia.

Species XIV, XV. Fig. 25, 26.

Si radices duæ minimæ æquentur, ovalis,
quæ in speciebus 10^a , et 11^a , obtinebat eva-

TAB. II. dit punctum. Et figura vel constat ex Hyperbolis duabus inscriptis ad d, δ (*fig. 25.*) cum circumscriptâ ad D : quæ est decima quarta; vel constat ex Hyperbolis duabus ambigenis ad d, δ (*fig. 26.*) cum inscriptâ ad D : quæ est Species decima quinta.

Species XVI, XVII, XVIII, XIX.

Fig. 25, 26, 27, 28.

Si ex radicibus duæ sint impossibiles, puræ habebuntur tres Hyperbolæ sine Ovali, decussatione, cuspidè vel puncto conjugato. Et hujus species sunt quatuor: nempe decima sexta (*fig. 25.*) si circumscripta jaceat ad D , decima septima (*fig. 26.*) si inscripta jaceat ad D ; decima octava (*fig. 27.*) si circumscripta jaceat ad latus trianguli, et decima nona (*fig. 28.*) si inscripta jaceat ad latus trianguli.

Species XX, XXI. Fig. 30, 31.

Si radices sint æquales, et tertia est signi diversi, quatuor crura in Abscissâ concurrunt. Et figura constabit ex inscriptâ et cruciformi. Quod si inscripta (*fig. 30.*) jaceat ad angulum trianguli, Species est vigesima; sin jaceat inscripta (*fig. 31.*) ad latus trianguli, Species est vigesima prima.

Species XXII, XXIII. Fig. 31, 32. TAB. II.

Si radices duæ sint inæquales et tertia est signi diversi, crura quatuor quæ in speciebus duabus novissimis conjungebantur ab invicem segregantur. Et figura constabit ex Hyperbolicis duabus inscriptis, in angulis Asymptoton oppositis jacentibus cum conchoide intermedia. Si conchois (*fig. 31.*) jaceat ad easdem Asymptoti *d* partes cum triangulo *Dd*, Species est vigesima secunda; sin jaceat ad diversas (*fig. 32.*) Species est vigesima tertia. Hi sunt casus omnes radicum æquationis

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Hyperbolæ quatuor cum sex cruribus ad tres Asymptotos triangulum facientes jacentibus, quæ tres habent Diametros ad ordinatas duarum dimensionum.

Si in æquatione $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sit $b^2 = 4ac$, figura habet tres Diametros ad ordinatas duarum dimensionum: et crura eandem Asymptoton adjacentia ad easdem ejus partes semper in plagas oppositas protensa jacent. Nunquam hæc figura decussat Asymptotos, adeoque semper constat ex tribus inscriptis Hyperbolicis. Sequitur (per *Coroll 9. Prop. 16.*)

TAB.
III.*Species XXIV. Fig. 33.*Si æquationis $a x^3 + b x^2 + \frac{b^2}{4 a} x + d = 0$

(posito pro c ejus valore $\frac{b^2}{4 a}$) radices tres sint reales, ejusdem signi et inæquales, figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptis cum Ovali intra triangulum $D d \delta$: quæ est Species vigesima quarta.

Species XXV. Fig. 33.

Si radices duæ minimæ æquentur, Ovalis in punctum evanescet, et figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptis cum puncto conjugato: quæ est Species vigesima quinta.

Species XXVI, XXVII. Fig. 33, 34.

Si radices duæ imaginariæ sint, figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptis sine Ovali vel puncto conjugato. Quod si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $D d \delta$ (*fig. 33.*) Species est vigesima sexta, sin jaceant (*fig. 34.*) ad latera ejusdem, Species est vigesima septima.

Hæ sunt omnes casus radicum æquationis $a x^3 + b x^2 + \frac{b^2}{4 a} x + d = 0$; nam impossibile

est duas ejus radices maximas, vel omnes inter se æquari. Impossibile itidem est duas radices esse ejusdem signi, et tertiata signi ab iis diversi.

Hyperbolæ novem cum sex cruribus jacentibus ad tres Asymptotos ad unum punctum convergentes.

Si æquationis

$$x y^3 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

desit terminus $b x^2$, tres Asymptoti (per *Coroll. 1. Prop. 16.*) in uno eodemque puncto conveniunt. Et in illo casu (per *Coroll. 3. Prop. 16.*) figura nunquam habet ovalem, nodum, cuspidem vel punctum conjugatum: Species ejus ergo omnes sunt puræ, et ex puris hactenus enumeratis facillime enumerantur, ut sequitur.

Vertuntur Species quinta et sexta in vigesimam octavam (*fig. 36.*).

Septima et octava in vigesimam nonam (*fig. 35.*).

Nona in tricesimam (*fig. 37.*) quando anginea transit per centrum, et in tricesimam primam (*fig. 36.*) ubi non transit per centrum *A.*

Hæ quatuor Species Diametrum non habent

TAB.
III.

Vertuntur species decima sexta et decima octava (*fig. 38.*) in tricesimam secundam.

Species decima septima et decima nona (*fig. 39.*) in tricesimam tertiam.

Vigesima et vigesima prima (*fig. 40.*) in tricesimam quartam.

Vigesima secunda et vigesima tertia (*fig. 41.*) in tricesimam quintam.

Et hæ quatuor Species unicam habent Diametrum.

Ac denique vertitur Species vigesima sexta et vigesima septima (*fig. 42.*) in tricesimam sextam. Hæc figura habet tres Diametros.

Nulla hic oriri potest difficultas, modo consideremus specierum singularum duarum, in unam hic coalescentium, diversitatem antea debitam fuisse triangulo ab Asymptotis comprehenso, quod nunc in nihil evanuit.

Hyperbolæ sex cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton jacentibus.

Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

terminus ax^3 sit negativus, figura (per *Coroll. 17. Prop. 16.*) habebit duo tantum crura ad unicam Asymptoton jacentia: et hæc crura (per *Coroll. 11. Prop. 16.*) ad diversas Asymptoti partes in plagas oppositas extensa

jacebunt. In illo casu erit

$$y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{(-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}e^2)}}{x}$$

ubi constat ordinatam y fore possibilem quando quantitas $-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}e^2$ est affirmativa, et impossibilem quando negativa.

Species XXXVII. Fig. 43.

Si æquationis $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{2}e^2$ radices omnes sint reales inæquales, eæ sunt $AP, A\sigma, A\pi, Ap$; erige ordinatas $PT, \sigma\tau, \pi\lambda, pt$, et erunt T, τ, λ, t limites; et intra τ, t continetur Ovalis: adeoque figura constat ex ovali cum anguineâ circa Asymptoton flexâ: quæ est Species tricesima septima.

Species XXVIII. Fig. 44.

Si radices duæ mediæ AP, Ap æquantur, ovalis tangit anguineam, et inde figura constat ex Hyperbolâ unicâ nodatâ: quæ est species tricesima octava.

Species XXXIX. Fig. 45.

Si radices tres ejusdem signi sint æquales, nodus migrat in cuspidem, et figura constat ex unicâ cuspidatâ: quæ est Species tricesima nona.

T A B.
III.

T A B.
III.*Species XL. Fig. 47.*

Si è radicibus ejusdem signi duæ maximæ æquentur; ovalis quæ in specie 37^a obtinebat, in punctum minuetur: et figura constat ex puncto cum anguinæ circa ordinatam primam flexâ: quæ est Species quadragesima.

Species XLI, XLII. Fig. 46., 47.

Si è radicibus duæ sint impossibiles, manebit anguinea pura: quod si illa transit per centrum (*fig. 47.*) Species est quadragesima prima.

At si non transit per centrum (*fig. 46.*) Species est quadragesima secunda.

Hyperbolæ septem cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton extensis, cum Diametro ad ordinatas duarum dimensionum.

Si desit terminus $e y$, Abscissa est Diame-
ter, et (per *Coroll. 7. Prop. 16.*) crura ad
eandem ordinatæ primæ partes jaçentia in pla-
gas contrarias in infinitum serpunt. Invenietur

$$y = \frac{\pm \sqrt{(-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)}}{x};$$

adeoque omnes casus æquationis patescunt
describendo parabolam æquatione

$$z = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx \text{ definitam.}$$

Species XLIII. Fig. 48.

Si æquationis $a x^3 = b x^2 + c x + d$ radices sint omnes reales ejusdem signi et inæquales, figura constat ex conchoide cum ovali ad convexitatem ejus : quæ est Species quadragesima tertia.

Species XLIV. Fig. 49.

Si radices duæ sint inæquales, et ejusdem signi, et tertia contrarii, figura constat ex conchoide cum ovali ad concavitatem : quæ est Species quadragesima quarta.

Species XLV. Fig. 50.

Si radices omnes sint ejusdem signi, et duæ minimæ æquentur, figura constat ex Hyperbolâ nodatâ : quæ est Species quadragesima quinta.

Species XLVI. Fig. 51.

Si tres radices æquentur, nodus evadit cuspis, et figura evadit Cissois Veterum : quæ est Species quadragesima sexta.

Species LXVII. Fig. 53.

Si radices duæ maximæ æquentur et tertia sit ejusdem signi, figura constat ex conchoide cum puncto ad convexitatem : quæ est Species quadragesima septima.

TAB. Si radices duæ æquentur et tertia sit signi
 1V. contrarii, figura constat ex conchoide cum
 puncto ad concavitatem (*fig. 52.*). Quæ est
 Species quadragesima octava.

Species XLIX. Fig. 52, 53.

Si radices duæ sint impossibiles, figura const-
 stat ex conchoide solâ : quæ est Species qua-
 dragesima nona.

PROP. XVII. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = *bx^2 + cx + d$,
 designat figuram habentem quatuor crura
 quorum duo sunt Hyperbolica ad ordinatam
 primam jacentia; et duo sunt Parabolica in
 eandem plagam extensa, quæ pro Asymptoto
 sortiuntur parabolam *Conicam*.

Sit $AB = x$, $BC = y$. (*fig. 28.*) Invenies

$$y = \frac{1}{2} \frac{e}{x} + \frac{\sqrt{(bx^2 + cx + dx + \frac{1}{2}e^2)}}{x} :$$

reducatur pars irrationalis in seriem $\frac{e}{2x} + \frac{d}{e}$ &c
 cò citius convergentem quò minor est x ;
 atque unus ordinatæ valor erit $-\frac{d}{e}$ &c. alter

$\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. valor ille primus indicat ordina-
 tam primam secare curvam : et valor hic ul-

timus $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. (per *Coroll. 2. Prop. 7.*)

indicat ordinatam primam *Ad* esse Asymptoton, habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia, in plagas oppositas progredientia. Evadat jam x utcunque magna, et etiam sine limite augebuntur ordinatæ y duo valores: quæ curva habet alia duo crura infinita: Quod si mutetur signum ipsius x , hoc est, si sumatur Abscissa ad alteras partes, terminus $b x^2$ evadet negativus; et indè augendo x ad illas partes ordinata tandem evadet imaginaria. Igitur curva habet quatuor tantùm crura infinita. Reducatur y in seriem

$\pm \sqrt{b x} \pm \frac{c}{2 \sqrt{b x}}$ &c. unde (per *Prop. 6.*)

$\pm \sqrt{b x}$ est Ordinata Asymptoti quæ quidem est Parabola conica, axem habens AB , latus rectum b , et verticem A . Q. E. D.

Coroll. 1. Si terminus $c x$ sit affirmativus, parabola conica jacet intra crura hujus figuræ; sin negativus parabola conica figuræ crura in sinu suo complectitur: ut constat ex *Coroll. 2. Prop. 6.*

Coroll. 2. Parabola hæc conica numquam secat curvam in pluribus punctis quam in duobus. Occurrat ordinata BC parabolæ E , et erit $BE = \pm \sqrt{b x}$, ideoque ubi Parabola

secat curvam evadit $y = \pm \sqrt{bx}$, coeuntibus punctis C, E : et $y^2 = bx$, unde $x = \frac{y^2}{b}$ quem valorem pro x in æquatione substitue, et invenietur $y = \frac{be \pm \sqrt{(b^2 e^2 - 4bcd)}}{2c}$ puncta

igitur intersectionis ad summum duo tantum sunt, quum æquatio eadem determinans est duarum dimensionum.

Coroll. 3. Igitur Parabola vel secat figuram in duabus punctis vel in nullis; propterea quod æquatio quadratica vel habet duas radices posibles vel nullas.

Coroll. 4. Si $4cd$ majus sit be^2 , Parabola non secat curvam, quoniam æquatio

$$y = \frac{be \pm \sqrt{(b^2 e^2 - 4cd)}}{2c}$$

puncta intersectionis determinans, erit impossibilis. Nam quantitas vinculo quadratico inclusa est negativa; et in illo casu crura Parabolæ jacent intra crura figuræ.

Coroll. 5. Si $4ad$ æqualis sit be^2 , Parabola tangit curvam. Nam sint F, K puncta intersectionis, FG, KH ordinatæ ab Abscissam; possunt hæ ordinatæ ad diversas vel eandem Abscissæ partes jacere: et si sit $4cd = be^2$ istarum rectarum evanescit differentia; adeoque

coeunt intersectionis puncta, et ex iis coeuntibus conflatur punctum contactûs.

Coroll. 6. Si parabola secet curvam in duobus punctis, jacent hæc puncta ad easdem vel diversas Abscissæ partes, prout terminus cx est affirmativus aut negativus : ut ex *Corollario* primo facilè colligitur.

Coroll. 7. Si desit terminus ey , Abscissa est diameter, et curva non decussat Asymptoton Ad , sed crura ad easdem ejus partes in plagas oppositas extensa jacebunt.

Coroll. 8. Et quando deest terminus ille ey , puncta intersectionis F, K in eâdem ordinatâ jacebunt, coeuntibus punctis G, H .

Coroll. 9. Et in illo casu Parabola secat curvam, vel non secat, prout terminus cx est negativus aut affirmativus : ut constat ex *Corollario* secundo.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - cy = *bx^3 + cx + d$.

Figuræ septem partim Hyperbolicæ, partim Parabolicæ, scilicet quæ habent duo crura Hyperbolica, et duo Parabolica.

Species I. Fig. 54.

Si æquationis $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$ extrahantur radices tres $AP, A\varpi, A\pi$, et

TAB. ab earum extremis erigantur Ordinatæ totidem *PT*, $\omega\tau$, $\pi 1$, hæ tangent curvam in punctis *T*, τ , 1 , qui sunt limites. Nam si tres radices sint omnes reales ejusdem signi et inæquales, crura Hyperbolica et Parabolica ad easdem Abscissæ partes positæ junguntur, et intra limites $\pi.1$, continetur Ovalis : quæ est Species quinquagesima.

Species LI. Fig. 55.

Si è tribus radicibus ejusdem signi duæ minores inter se æquentur, Ovalis accedet ad unam figurarum Hyperbolico-Parabolicarum Nodum efficiens : quæ est Species quinquagesima prima.

Species LII. Fig. 56.

Si tres radices æquentur, nodus migrabit in cuspidem; quæ est Species quinquagesima secunda.

Species. LIII. Fig. 57.

Si è tribus radicibus ejusdem signi, duæ majores æquentur, Ovalis evanescet in punctum conjugatum : quæ est Species quinquagesima tertia.

Species

Species LIV. Fig. 57, 58.

T A B.
IV.

Si duæ radices sint imaginariæ; manebunt duæ puræ figuræ: quæ est Species quinquagesima quarta.

Species LV. Fig. 59.

Si radices duæ æquantur, et tertia est signi contrarii; figura evadit cruciformis: quæ est Species quinquagesima quinta.

Species LVI. Fig. 60.

Si radices duæ sint inæquales, et tertia est signi contrarii; figura constat ex Anguinæ circa Ordinatum primam flexâ, cum Parabolâ: quæ est Species quinquagesima sexta.

Figuræ quatuor H. perbolo - Parabolicæ cum Diametro Abscissâ.

Species LVII. Fig. 61.

T A B.
V.

Si æquationis $b x^2 + c x + d = 0$ radices sint impossibiles, crura Parabolica junguntur cum Hyperbolicis ad easdem Abscissæ partes: Quæ est Species quinquagesima septima.

Species LVIII. Fig. 62.

Si radices duæ sint æquales et ejusdem signi, figura evadit cruciformis: quæ est Species quinquagesima octava.

TAB.
V.*Species LIX. Fig. 63.*

Si radices sint ejusdem signi et inæquales, figura constat ex conchoide cum Parabolâ ad easdem partes Ordinatæ primæ : quæ est Species quinquagesima nona.

Species LX. Fig. 64.

Si radices sint signi diversi, Conchois et parabola ad diversas ordinatæ primæ partes jacebunt : quæ est Species sexagesima.

PROP. XVIII. THEOR.

Vid. Fig. 65, 66, 67, 68.

Æquatio $xy^2 - cy = **cx + d$ designat figuram habentem sex crura Hyperbolica ad tres Asymptotos, quarum duæ sunt Abscissæ parallelæ, jacentia.

Reducatur y in seriem $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citius convergentem, quo minor est x : unde (per *Coroll. 2. Prop. 7.*) ordinata prima est Asymptotos habens duo crura ad diversas ejus partes jacentia, et in plagas oppositas progredientia. Abscissa x ad utrasque partes in infinitum augeri potest, et ordinata numquam evadet impossibilis. Reducatur y in seriem

eo citiùs convergentem quo major est x ,

$$\pm \sqrt{c} + \frac{\pm d + e \sqrt{c}}{2x \sqrt{c}} \text{ \&c.}$$

Unde (per *Prop. 6.*) $\pm \sqrt{c}$ est ordinata Asymptoti ad Abscissam x pertinens. Sume igitur in ordinatâ primâ duas rectas hinc inde æquales \sqrt{c} , et rectæ ductæ per earum extremitates Abscissæ parallelæ, crunt duæ Asymptoti.

Coroll. 1. Si $d + e \sqrt{c}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos $d g$ jacet inter ejus crus et Abscissam; sin negativa contrarium accidit.

Coroll. 2. Crura adjacentia Asymptotos $d g$, $\delta \gamma$ semper jacent ad diversas earum partes: Nam si signum Abscissæ mutetur, quantitatis $d + e \sqrt{c}$ signum mutabitur.

Coroll. 3. Curva non decussat Asymptotos $d g$, $\delta \gamma$ (per *Coroll. 6. Prop. 4.*).

Coroll. 4. Eodem modo ostenditur, quo in *Coroll. 1.* quod si sit $d - e \sqrt{c}$ quantitas affirmativa, Asymptotos $\gamma \delta$ jacet inter crus et Abscissam.

Coroll. 5. Ergo si $d + e \sqrt{c}$, $d - e \sqrt{c}$ sint quantitates eisdem signi, Asymptoton $d g$, $\delta \gamma$ extremitates unæ ad eandem plagam tendentes jacent extrâ crura, et reliquæ intrâ.

Coroll. 6. Si $d + e \sqrt{c}$, $d - e \sqrt{c}$ sint signi

T A B.
V.

contrarii, Asymptoton dg , δy extremitates ad plagas oppositas ductæ jacebunt intrà crura, reliquæ extrà.

Coroll. 7. Crura adjacentia Asymptoton $d\delta$, jacent ad eandem vel diversas ejus partes, prout abest vel adest terminus ey .

Coroll. 8. Si desit terminus ey , extremitates unæ Asymptoton in eandem plagam extensæ jacent intrà crura, reliquæ extrà.

Coroll. 9. Si terminus cx sit negativus; figura habet duo tantùm crura ad ordinatæ primæ eandem vel contrarias partes jacentia, prout abest vel adest terminus ey .

Enumeratiò Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - cy = cx + d$.

Species LXI. Fig. 65.

Si æquationis $cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$, radices sint reales, cæ necessariò habebunt eandem signa, et erunt inæquales: atque figura constabit ex tribus Hyperbolis, Inscriptâ ad d , ambigenâ ad δ , cum tertiâ intra Asymptotos parallelas: quæ est Species sexagesima prima.

Species LXII, LXIII. Fig. 66, 67.

Si æquationis illius radices sint imaginariæ, habebitur Anguinca intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis: si Anguinca tran-

sit per centrum (*fig. 67.*) Species est sexagesima secunda; si non transeat per centrum (*fig. 66.*) Species est sexagesima tertia. T A B.
V.

Species LXIV. Fig. 68.

Si desit terminus ey , figura constat ex Hyperbolâ intra Asymptotos parallelas, cum duabus inscriptis : quæ est Species sexagesima quarta.

Species LXV, LXVI. Fig. 69, 70.

Si æquationis $xy^2 + ey = cx + d$, terminus cx sit negativus; figura constat ex Angineâ pura : si Anginea illa transit per centrum, Species est sexagesima quinta; at si non transit per centrum, Species est sexagesima sexta.

Species LXVII. Fig. 71.

Si desit terminus ey , æquatio

$$xy^2 = -cx + d,$$

designat conchoidem puram : quæ est Species sexagesima septima.

TAB.
V.

PROP. XIX. THEOR.

Æquatio $xy^2 - cy = *** + d$ *designat*
Figuram habentem quatuor crura.

Vide fig. 72, ubi $AB = x$, $BC = y$, in-
venietur $y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{(dx + \frac{1}{2}e^2)}}{x}$, id est per

methodum serierum, $y = \frac{x}{e} + \frac{d}{e} + \&c.$

Unde Ordinata prima AG est Asymptotos habens duo crura adjacentia. Augeatur jam x perpetuò, et y non evadet impossibili; quare curva habet alia duo crura: quod si mutetur signum ipsius x , evadet y tandem imaginaria; adeoque curva ad illas plagas in infinitum non pergit. Quoniam vero augendo x , y perpetuò diminuitur, patet Abscissam esse alteram Asymptoton habentem duo crura ad diversas eius partes jacentia, in plagam eandem protensa. Q. E. D.

Coroll. Abscissa non secat curvam; nam (per *Coroll. 4. Prop. 4.*) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Species LXVIII. Fig. 72.

Si adsit terminus $e y$, figura constat ex duabus Hyperbolis, Inscriptâ et Ambigenâ: quæ est Species sexagesima octava.

Species LXIX. Fig. 73.

T A B.
V.

At si desit terminus $e y$, figura constat ex duabus inscriptis in angulis Asymptotón deinceps jacentibus : quæ est Species sexagesima nona.

PROP. XX. THEOR.

Æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem duo crura Hyperbolica ad Ordinatum primam jacentia, et duo Parabolica quæ pro Asymptoto habent Parabolam Conicam.*

Sit Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$.

Est $y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$, sit x infinitè

parva, et erit $y = \frac{d}{x}$, igitur (per *Coroll.* 2.

Prop. 16.) Ordinata prima habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia, et in plagas oppositas progredientia. Augeatur jam x tam versùs dextram quam sinistram in infinitum, et valor ipsius y semper erit affirmativus, et etiam sine limite increscet. Sumatur

$$BE = ax^2 + bx + c,$$

eritque (per *Prop.* 6.) locus omnium E Asymptotos curvæ, quæ quidem est Parabola Conica. Q. E. D.

Coroll. 1. Hæc Figura nunquam decussat ejus Asymptoton AG . Nam tria intersectionis puncta abeunt in infinitum. Adeoque crura Hyperbolica et Parabolica ad easdem partes rectæ (*fig.* 73.) AG jacentia semper copulantur : Et proinde hujus figuræ Species tantum est unica, quæ est septuagesima.

Coroll. 2. Parabola Conica nunquam decussat hanc curvam; secet enim, si fieri possit, et erit $EC = 0$, adeoque etiam $d = 0$, quod fieri nequit.

Coroll. 3. Sit $AD = -\frac{b}{2a}$, ordinata

$DF = \frac{4ac - b^2}{4a}$: Vertice F , Diametro DF ,

et latere recto $\frac{1}{a}$ descripta Parabola est Asymptotos curvæ.

PROP. XXI. THEOR.

Æquatio $y^2 = ax^2 + bx + c$ *designat figuram habentem duo crura Parabolica in oppositas plagas errantia.* Vide *fig.* 75.

Augeatur x in infinitum, et simul augebuntur ordinatæ y duo valores hinc inde æquales, ergo curva habet duo crura infinita. At si mutetur signum Abscissæ, terminus ax^2 evadet negativus : et proinde datur certus li-

mes, ultrà quem x in illas plagas non pergit. Reducendo y in seriem patebit crura esse Parabolica. Q. E. D.

T A B.
VI.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$

Species LXXI. Fig. 75, 76.

Si æquationis $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$, radices omnes sint reales et inæquales, Parabola habet Ovalem ad verticem: quæ est Species septuagesima prima.

Species LXXII, LXXIII. Fig. 77, 78.

Si radices duæ æquantur, figura vel prodit Nodata (*fig. 77.*) quæ est Species septuagesima secunda; vel punctata (*fig. 78.*) quæ est Species septuagesima tertia.

Species LXXIV. Fig. 80.

Si tres radices æquantur, figura erit cuspidata, quæ est Species septuagesima quarta.

Estque hæc figura Asymptotos Parabolæ quam designat æquatio

$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Species LXXV. Fig. 78, 79.

Si radices duæ sint impossibiles, figura erit pura campaniformis, Speciem constituens septuagesimam quintam.

A B.
I.*Species LXXVI. Fig. 81.*

In quarto casu æquatio erat *

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d :$$

quæ (per *Prop. 8.*) designat figuram habentem crura contraria, quæ *Cubica Parabola* dici solet. Et sic *Species* omnino sunt septuaginta sex.

Lineæ tertii ordinis inter se formâ haud parum differunt, scilicet ut *Ellipsis* à *circulo*, vel *Hyperbola æquilatera* à reliquis.

Sed et aliquando vertices figurarum quas concavas descripsimus, formam cuspidis induunt: at cuspidis istiusmodi non componuntur ex nodis infinite parvis, nec unquam prodeunt admodum acuti.

Determinatio Locorum Geometricorum.

Postquam *Species* omnes *Linearum* alicujus ordinis enumerantur, convenit ut dignoscatur *Species* quam constituit *Linea* particularis æquatione quâlibet propositâ denotata. Innumeræ enim æquationes, quoad formam multum inter se discrepantes, eandem *Lineam* designare possunt. *Lineæ* quæ excurrunt in infinitum ex *Asymptotis* suis optimè determinantur; ovals verò ex *Diametris*.

Sit

$$y^2 + Axy + By + Cx^2 + Dx + E = 0$$

æquatio universalis ad conic sectiones. Hæc æquatio (per *Prop. 10.*) facillimè convertetur in hanc (*fig. 12.*) $y^2 = Ax^2 + Bx + C$. Et figura erit Hyperbola, Parabola aut Ellipsis prout terminus Ax^2 affirmativus est, nullus aut negativus.

In primo casu, quando figura est Hyperbola, sumendo Abscissam novam $= x + \frac{B}{2A}$ æquatio induet hanc formam $y^2 = Ax^2 + B$. Sit jam CB Abscissa $= x$, Ordinata $BD = y$; et erit principium Abscissæ C centrum Hyperbolæ. Sume in ordinatâ BD ; BE , Be hinc inde æquales x , et (per *Prop. 6.*) erunt CE , Ce duæ Asymptoti: ducatur CHN bisecans angulum Asymptoton, et erit CN axis. Sit H vertex figuræ, HGF ordinatam applicata ad diametrum CB , transiens per verticem. Concipiatur jam ordinata Dd motu parallelo ferri donec cum ordinatâ FH coeat; et in illo casu erit $dN = 0$, adeoque $BD = BN$. Ob datos trianguli CBN angulos, datur ratio CB ad BN , vel x ad BN . Sit ergo $x : BN :: C : D$, et erit $BN = \frac{Dx}{C}$; est verò $BD = y = \sqrt{Ax^2 + B}$. Pone ergo $(BD =) \sqrt{Ax^2 + B} = \frac{Dx}{C}$, et inve-

nies $x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2 - AC^2}}$: sit ergo

$CG : GH :: C : D$, et erit H vertex; atque inde si erigatur normalis HK Asymptoton secans in K ; erunt CH, HK semi-axes conjugati. Datis vero CH, HK semi-axibus conjugatis facilè describitur Hyperbola. Q. E. F.

Si figura est Parabola, æquatio erit $y^2 = Ax + B$, vel sumendo principium Abscissæ in curvâ, $y^2 = Ax$. Sit Abscissa $AB = x$, (*fig. 31.*) ordinata BC vel $Bc = y$. Per A duc ALM perpendicularem ad Abscissam : secat ea curvam in L , ordinatam vero Cc in M . Sit $LDNK$ ordinata Abscissam in N secans. Moveatur ordinata BC motu parallelo donec coincidat cum LDK , et in illo casu erit $Mc = 0$, et proindè $BM = BC = y$. Ob datos trianguli ABM angulos datur ratio AB ad BM , vel x ad BM ; sit igitur $x : BM :: C : D$, et erit $BM = \frac{Dx}{C}$. Pone

ergo $\frac{Dx}{C} = y = \sqrt{Ax}$, et invenies

$x = \frac{AC^2}{D^2} = AN$; datur ergo AN , et etiam

dabitur NL quæ est ad AN ut D ad C . Datur ergo punctum L , et recta AL tam ma-

gnitudine quam positione. Biseca AL in E et sit $HE D$ normalis ad medium ejus punctum E , et erit HE axis. Sit vertex H , HGF ordinata ad Diametrum AB transiens per H , et in illo casu erit $y = GH$, est vero GH data quantitas : et erit $x = \frac{GH^2}{A} = AG$.

Datur punctum G ; per quod punctum si ducatur ordinata GH æqualis datæ rectæ DN , dabitur vertex H , et recta HE ; est vero latus rectum principale æquale $\frac{AE^2}{HE}$, quod exinde dabitur. Datis jam axe HE , vertice H et latero recto $\frac{AE^2}{HE}$ describi potest Parabola.

Q. E. F.

Si figura sit Ellipsis (*fig. 32.*), æquatio erit $y^2 = -Ax^2 + Bx + C$, quæ in hanc reducitur $y^2 = B - Ax^2$. Sit Abscissa $CB = x$, Ordinata BD vel $Bd = y$. Eritque principium Abscissæ centrum Figuræ. Secet curvam in L , et erit $CL = \sqrt{\frac{B}{A}}$: centro C radio CL describe circulum LE Ellipsin secantem in E : sitque EN ordinata; EP perpendicularis in Abscissam et dabitur specie triangulum NPE . Sit ergo $NE : EP :: C : D$, id est

$y : EP :: C : D$, undè

$$EP = \frac{Dy}{C}, \quad PN = \frac{C}{y} \times \sqrt{(C^2 - DD)}.$$

Est verò per naturam curvæ $CN = \sqrt{\frac{B-y^2}{A}}$,

adeoque tota

$$CP = \frac{y}{C} \sqrt{(C^2 - D^2)} + \sqrt{\frac{B-y^2}{A}};$$

et est $CE = \sqrt{\frac{B}{A}}$ adeoque æquatio

$CE^2 = CP^2 + PE^2$ dabit y vel EN ; et in-
dè invenietur EN Abscissa correspondens;
atque adeo datur punctum E , et per conse-
quens recta CE positione. Duc rectas KC ,
 CH bisecantes angulos ACE , ECL ; et
hi erunt axes, qui itaque positione dantur.

Eorum verò magnitudo sic determinatur:
Occurrat ordinata BD axi in N , et ducatur
 HGF . Ob datum specie triangulum CGH ,
datur ratio CG ad GH , sit ergo $CH : GH$
vel $CB : BN :: C : D$, et erit $BN = \frac{Dx}{C}$

Sed cum ordinata BD coincidit cum GH ,
evadit BN æqualis $GH = y = \frac{Dx}{C}$; in æ-

quatione substituendo illum ipsius valorem,
erit $\frac{D^2 x^2}{C^2} = B - Ax^2$, undè

$$x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2 + AC^2}};$$

adeoque dabitur ordinata GH ; et punctum H , atque inde dabitur CH magnitudine. Et eodem modo invenire licet axem minorem.

Hæc tria Problemata soluta dare malui ex nudâ naturâ æquationum curvas definientium, quam per quasdam *Apollonii* Propositiones more veterum Geometrarum: Hoc modo enim melius innotescit analogia inter Loca secundi ordinis et Loca tertii et superiorum ordinum. Proprietates sectionum conicarum à Geometris hactenus traditæ sufficiunt ad determinanda loca quæ incidunt in sectiones conici: consimiles verò linearum superiorum ordinum proprietates traditas nondum habemus. Quâ ratione verò invenire licet quam Speciem constituit linea tertii ordinis æquatione quâlibet designata, ex propositione decimâ quintâ constare potest: quod per sequentia plenius adhuc constabit.

Exemplum primum.

Oporteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 + x^3 = a^3$ designata, ubi ordinatæ insistent abscessâ ad angulos rectos. (*fig. 33.*)

Mutetur signum Abscessæ et æquatio evadet

$y^3 = x^3 + a^3$; et indè (per Theorema *Newtoni*)

$y = x + \frac{a^3}{3x^2} + \&c.$ Sit Abscissa AB , duc

rectam AC per initium Abscissæ, quæ cum Abscissâ angulum semirectum contineat, et (per *Prop. 6.*) erit AC Asymptotos. Et quoniam unica tantum istiusmodi series obtineri potest, curva habet nisi duo crura infinita ad eandem Asymptoton jacentia, et (per *Coroll. 2. Prop. 6.*) hæc crura jacent ad eandem Asymptoti partes; et indè (per *Coroll. 7. Prop. 16.*) curva habet diametrum ad ordinatas duarum dimensionum. Sit E punctum quodlibet in curvâ, Ordinata $ED = y$, Abscissa $AD = x$; Ordinata nova Asymptoto parallela $FE = v$, Abscissa correspondens $AF = z$; erit

$$y = v \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad x = v \sqrt{\frac{1}{2}} - z.$$

In æquatione $y^3 = x^3 + a^3$, hosce valores substitue, et proveniet

$$\frac{1}{2} v^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} v^3 \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z v^3 + 3 z^2 v \sqrt{\frac{1}{2}} - z^3 + a^3,$$

vel $3 z^2 v^3 - 6 z^2 v \sqrt{\frac{1}{2}} = 2 a^3 - 2 z^3$. Unde (per *Prop. 10.*) $z \sqrt{\frac{1}{2}}$ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas v ad curvam terminatas:

Duc igitur rectam AG per principium Abscissæ Asymptoton secantem ad rectos angulos; et illa erit recta bisecans ordinatas. Occurrat ea ordinatæ EF in G ; et sit Abscissa nova $AG = x$, ordinata correspondens $EG = y$.

Erit

Erit. $z = x\sqrt{2}$, $v = y + x$; in æquatione $3z^2v^2 - 6z^2v\sqrt{2} = 2a^3 - 2z^3$ hosce valores pro z , v substitue, et orietur

$$3xy^2\sqrt{2} = 2a^3 - x^3\sqrt{2},$$

vel ponendo

$a = c\sqrt{2}$, $3xy^2\sqrt{2} = 4c^3\sqrt{2} - x^3\sqrt{2}$; et dividendo per $\sqrt{2}$, $3xy^2 = 4c^3 - x^3$: cumque æquatio hæc sit ejusdem formæ cum hæc $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ubi deest terminus ey , et ax^3 est negativus, et præterea æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d$ radices duæ sunt impossibiles, figura constituit Speciem quinquagesimam nonam. Q. E. I.

Exemplum secundum.

Oporteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$ designata, ubi ordinatæ insistent abscessæ ad angulos rectos: hujus æquationis tres radices seu valores ipsius y reductæ in series eo citius convergentes quo major est abscessa x sunt

$$x + \frac{\sqrt{ax}}{a^2} - \frac{a^3}{2x^2} \&c.$$

$$x - \frac{a^3}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2} \&c.$$

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^4} + \frac{7a^9}{x^6} + \&c.$$

Sit Abscessa $AB = x$, (*fig. 34*) Ordinata rec-

M

tangula $Bc C\gamma$: in illâ ordinatâ sit $BD=AB$,
 junge AD , et (per *Prop. 6.*) erit illa Asym-
 ptotos, quæ pro duabus Asymptotis coeun-
 tibus habenda est; siquidem duo termini prio-
 rum serierum coincidunt: undè hæc Linea
 vel constituit speciem sexagesimam octavam
 vel sexagesimam nonam, nam hæc duæ spe-
 cies solæ sunt Linearum tertii ordinis quæ ha-
 bent Asymptotos duas coincidentes. Series
 tertia $\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^1} + \frac{7a^9}{x^8} + \&c.$ indicat abs-
 cissam esse Asymptoton habentem duo crura
 ad oppositas plagas protensa et ad easdem ejus
 partes jacentia; quoniam, mutando signum
 abscissæ, terminus $\frac{a^1}{x^2}$ manet affirmativus. Et
 quoniam in extremitate Asymptoti AD ad
 distantiam infinitam sitâ jacet punctum curvæ
 duplex; Asymptotos illa habet crura sua ad
 diversas ejus partes jacentia, et in plagas eas-
 dem protensa. Unde facilè videre est hanc cur-
 vam constituere Speciem sexagesimam nonam:
 Habetque Asymptoton AD pro Diametro ad
 ordinatas duarum dimensionum, quæ parallelæ
 sunt Asymptoto AB . Q. E. I.

F I N I S.

INVENTIO LINEÆ

CELERRIMI DESCENSUS

in quacunque hypothesi gravitatis.

PROBLEMA.

*Invenire Lineam celerrimi descensûs, datâ lege
vis Cētripetæ.*

SIT C centrum virium, (fig. 35.) $ADFH$ linea quæsitâ, A punctum de quo corpus cadere debet, B, D, E tria puncta, quorum distantiæ sunt quam minimæ; jungæ CB, CD, CE : centro C et radiis CB, CD , describe circulos BO, DP , quorum hic secet CN (axem curvæ) et CE in P, Q respectivè: ille verò rectas CD, CE , in R, S ; axem verò in O .

Sit $MLKG$ linea cujus Ordinatæ NM, OL, PK, FG , insistentes Abscissâ CN normaliter proportionales sunt vi cētripetæ in punctis N, O, P, F , respectivè. Cadat jam corpus à puncto N , versùs centrum vi solâ cētripetâ agitatum, et (per *Prop. 39. Lib. 1. Princip. Newtoni*) ejus velocitas in

puncto quovis O erit ut arcæ $NOLM$ latus quadratum.

Jaceant puncta A, N in circumferentiâ circuli cujus centrum C , et velocitates corporum in curvâ AB et recta NC motorum, in omnibus æqualibus à centro C distantis erunt æquales. Nam (per Prop. 40. Lib. 1. *Newtoni*) si eorum velocitates in aliquâ æquali altitudine sint æquales, in omni æquali altitudine æquales erunt: at corporum istorum velocitates in punctis A, N , erant æquales, quippe nullæ; ergo et in omnibus distantis æqualibus æquales erunt. Igitur velocitas corporis in curvâ ABF moti, per Arcæ curvilineæ MLG latus quadratum rite representabitur: scilicet velocitas in B est ut \sqrt{NOLM} , velocitas in D est ut \sqrt{NPKM} .

Supponamus jam tria puncta C, B, E esse data, et oporteat invenire D , ex cujus inventione dabitur relatio quam habet DR ad RB , et exinde determinabitur curva. Dantur igitur CE, CB . Fluat CE uniformiter, id est, sit $EQ = DR$, atque erit CD media arithmetica inter datas CB et CE , et proinde dabitur. Ex datis vero CB, CD , id est CO, CP , dantur arcæ $NOLM, NPKM$; adeoque dantur velocitates corporis ad puncta B, D . Velocitas quâ percurritur BD ea est quam

corpus habuit in B ; et tempus quo eadem percurritur est directè ut longitudo et reciprocè ut celeritas, hoc est ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}}$. Similiter

tempus quo percurritur DE est ut $\frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$;

et indè tempus quo percurritur BE est ut

$$\frac{BD}{\sqrt{NOLM}} + \frac{DE}{\sqrt{NPKM}};$$

sed quia tempus quo tota curva percurritur supponitur brevissimum, erit tempus per quamlibet ejus partem etiam brevissimum. Et proindè fluxio quantitatis huic tempori proportionalis æqualis nihilo.

Hiscæ præmissis, sit $CD = CP = x$, $DR = PO = \dot{x}$, $BR = \dot{y}$, $DQ = \dot{z}$, erit $BD = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $DE = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$: hisce valoribus pro BD , DE substitutis, erit

$$\sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{NOLM}} + \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}{NPKM}}$$

quantitas tempori proportionalis, adeoque ejus fluxio = 0, hoc est

$$\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\sqrt{NOLM}} + \frac{\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{NPKM}} = 0;$$

nam \dot{x} et arcæ $NOLM$, $NPKM$ sunt

quantitates non fluentes. Ob data tria puncta C, B, E ; datur BS (normalis à vertice trianguli CBE in basin CE demissa)

$$= BR + RS = BR + DQ = \dot{y} + \dot{z},$$

adeoque $\dot{y} + \dot{z}$ est data quantitas, et ejus fluxio

$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, vel $\ddot{z} = -\ddot{y}$. In æquatione

$$\frac{\dot{y} \ddot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}} = \frac{-\dot{z} \ddot{z}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)} \sqrt{NPKM}}$$

pro \ddot{z} pone ejus valorem $-\ddot{y}$ et divide æquationem per \dot{y} atque erit

$$\frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)} \sqrt{NPKM}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}}$$

Cumque hoc universaliter in omnibus curvæ punctis obtineat, patet esse

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}}$$

datam quantita-
tem, vel $\frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}} = \frac{1}{A}$ (ubi
 A est data quantitas) et

$$A \dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM};$$

quæ æquatio determinat curvam. Q. E. I.

Coroll. I. Est $A^2 = NFGM$, nam cum rec-

ta CB vel x coincidit cum CF , ea est normalis in curvam et $\dot{x} = 0$, atque area $NOLM$ evadit = areæ $NFGM$. In æquatione igitur $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}$ evanescat \dot{x} et sit $NOLM = NFGM$, atque crit $A\dot{y} = \sqrt{\dot{y}^2} \sqrt{NFGM}$, id est, $A\dot{y} = \dot{y} \sqrt{NFGM}$ et dividendo per \dot{y} , $A = \sqrt{NFGM}$. Q.E.D.

Coroll. 2. $BD:BR$ ut velocitas maxima quam corpus in motu per curvam AF acquirit ad ejus velocitatem in puncto B . Nam est $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}$, vel $\sqrt{NFGM} \times \dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}$, adeoque $BD:BR::\sqrt{NFGM}:\sqrt{NOLM}$; hoc est, ut velocitas maxima ad velocitatem in puncto B .

Coroll. 3. $BR:RD::\sqrt{NOLM}:\sqrt{FOLG}$.

Coroll. 4. Si sint A, H , puncta curvæ altissima, et ducantur CA, CH , hæ tangent curvam in punctis A, H .

Coroll. 5. Igitur in nullâ hypothesi gravitatis recta linea est via celerrimi descensûs; præterquam ubi corpus descendens directè tendit ad centrum.

Coroll. 6. Sit BT longitudinis cujusvis, et $BT:TU::\sqrt{FOLG}:\sqrt{NOLM}$: sit

verò TU in TB normalis, jungē BU , et illa tanget curvam in puncto B . Nam $DR:BR:\sqrt{FOLG}:\sqrt{NOLM}$, ergo $DR:BR::BT:TU$; et proinde BU tangit curvam ad punctum B . Q. E. D.

Proprietates hucusque traditæ sunt generales, Lineæ celerrimi descensûs in omni hypothesis gravitatis universaliter competentes. Descendamus jam ad casus particulares.

Exemplum primum.

Supponamus vim centripetam esse uniformem. et agere in parallelis: quo in casu punctum C abit in infinitum (*fig. 36.*), existentibus CF , CD , CB parallelis. Peripheriæ AN , BO , DP et curva MG migrant in rectas, et area $NOLM$ in rectangulum, atque area $NOLM$ ad aream $NFGM$ ut NO ad NF et indè $RD:BR::\sqrt{NF}:\sqrt{NO}$. Suprà diametrum NF describe circulum NXF secantem ordinatam BO in X ; jungē NX , FX , et BU sit tangens ad B . Propter similia triangula NXF , NXO , FXO , $NF:NX::NX:NO$. Ergo $\sqrt{NF}:\sqrt{NO}::NF:NX$, et $NF:NX::FX:XO$. Undè $DB:BR::FX:XO$. Duc tangentem BU , et erit $BD:BR::BU:BO$ adeoque $BU:BO::XF:XO$. Ergo tangens BU semper

parallela est chordæ XF quæ est notissima proprietas cycloidis vulgaris.

Exemplum secundum.

Sit vis centripeta ut distantia à centro, et curva MLG (fig. 37.) migrabit in rectam transeuntem per centrum C . Sint anguli KCN , kCN semirecti $BR:DR::\sqrt{NOLM}:\sqrt{FOLG}$. Jam sit $CF=a$, $CO=x$, $CN=r$, et erit area $NOLM=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}x^2$; $FOLG=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$, undè $x:y::\sqrt{(x^2-a^2)}:\sqrt{(r^2-x^2)}$. Describatur hyperbola FTr , vertice F et Asymptotis CK , Ck . Occurrat OL hyperbolæ in T , et circulo in Q : atque erit per hujus hyperbolæ et circuli naturam $OT=\sqrt{(x^2-a^2)}$; $OQ=\sqrt{(r^2-x^2)}$. Ergo $DR:BR::OT:OQ$.

Hujus curvæ rectificatio per quadraturam hyperbolæ.

Patet $BD:DR::FS:OT$. Hoc est incrementum curvæ ad incrementum axis OP , ut data recta FS ad Hyperbolæ ordinatam respectivam OT . Erit igitur componendo, ut omnes BD ad omnes OP ita totidem FS ad totidem ordinatas hyperbolæ. Hoc est ut curva AF ad axem ejus NF , ita rectangulum $NFSr$ ad arcam hyperbolicam NFT .

Etenim area illa $NFT r$ est summa ordinatarum OT .

Erit etiam ut AB ad NO ita $Nr \times OF$ ad arcam OFT .

Hujus curvæ quadratura per quadraturas hyperbolæ et circuli.

Fluxio arcæ, scilicet triangulum

$$CBD = \frac{1}{2} CB \times BR = \frac{1}{2} x \times \dot{y} = \frac{1}{2} \dot{x} x \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{x^2 - a^2}}$$

Undè $CBD : \frac{1}{2} x \dot{x} :: \sqrt{(r^2 - x^2)} : \sqrt{(x^2 - a^2)}$; est verò CBD fluxio arcæ CFB , et $\frac{1}{2} x \dot{x}$ fluxio quantitatis $\frac{1}{4} x^2$: ergo ut area CFB ad $\frac{1}{4} x^2$ ita omnes $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ ad omnes $\sqrt{(x^2 - a^2)}$; hoc est $CFB : \frac{1}{4} x^2 ::$ area $FOQS$: arcam FOT . Coincidat jam CB cum CF et evanescet area CFB , at evadet

$\frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} CF^2 = \frac{1}{4} a^2$ igitur statim apparet $\frac{1}{4} x^2$ fluentem quantitatis $\frac{1}{2} x \dot{x}$ minui debere quantitate $\frac{1}{4} a^2$, &c. proindè erit verè $CFB : \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} a^2 :: FOQS : FOT$, et area $ABC : \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} a^2 :: NOQ : NOT r$; atque area tota $CF A : \frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{4} a^2 :: NSF : N r F$.

Exemplum tertium.

Sit vis centripeta reciprocè ut quadratum distantiaè à centro; et erit ordinata $OL = \frac{1}{x^2}$

(fig. 38.) adeoque per notas quadrandi methodos

$$FOLG = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}, \quad NO LM = \frac{1}{x} - \frac{1}{r};$$

et indè

$$BR^2 : RD^2 :: \frac{1}{x} - \frac{1}{r} : \frac{1}{a} - \frac{1}{x} :: \dot{y}^2 : \dot{x}^2,$$

vel quod idem est $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$

et $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{rx - ra} : \sqrt{ra - ax}$. Igitur latere recto r , axe FN , vertice F describe parabolam FS ; item latere recto a , axe NF , vertice N describe parabolam NQ : occurrat ordinata OL parabolis hisce in Q ,

S ; et erit $\dot{x} : \dot{y}$ vel $DR : BR :: OS : OQ$.

Nam est $OS = \sqrt{rx - ra}$, et

$$OQ = \sqrt{ra - ax}.$$

Hujus curvæ rectificatio.

Quoniam $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$, erit

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 : \dot{x}^2 :: rx - ax : rx - ra$; et indè

$$\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} : \dot{x} :: \sqrt{rx - ax} : \sqrt{rx - ra} ::$$

$BD : DR$, hoc est, ut fluxio curvæ ad fluxionem abscissæ: et componendo erit ut sum-

ma omnium $\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$ ad omnes \dot{x} , ita omnes $\sqrt{rx - ax}$ ad tot $\sqrt{rx - ra}$,

hoc est, $BF:FO::x\sqrt{rx-ax}-a\sqrt{ar-a^2}:(x-a)\sqrt{rx-ra}$ [nam $x\sqrt{rx-ax}$ fluens fixationis $\dot{x}\sqrt{rx-ax}$ minuenda est quantitate $a\sqrt{ar-a^2}$.]

Curva hæc perfectè quadrabilis est, nam $\dot{x}:\dot{y}::\sqrt{rx-ra}:\sqrt{ra-ax}$, ergo $x\dot{x}:x\dot{y}::\sqrt{rx-ra}:\sqrt{ra-ax}$; hoc est, $x\dot{x}:2CBD$ vel $\frac{1}{2}x\dot{x}:CBD::\sqrt{rx-ra}:\sqrt{ra-ax}$. Et sumendo summas omnium erit $\frac{1}{4}x^2:CFB::(x-a)\sqrt{rx-ra}:ra\sqrt{ra-a^2}-(r-x)\sqrt{ra-ax}$.

Et erit tota area CFA [comprehensa rectis CF , CA et curvâ AF] ad $\frac{1}{4}CN^2$ ut $\sqrt{CN^2-CN\times CF}$ ad $\sqrt{CN\times CF-CF^2}$.

Hæ sunt tres insigniores hypotheses gravitatis, etenim si praxin spectemus, tutò supponi potest uniformis, et agere in parallelis, at in rigore geometrico, hypotheses duæ ultimæ in rerum naturâ locum verè habent. Nam in terræ cavernis gravitas est ut distantia corporis à centro terræ, et in turrium vel montium cacuminibus ea est reciprocè in duplicatâ ratione distantia, ut constat ex principiis *Newtoni*.

Datâ lineâ celerrimi descensus, invenire legem vis centripetæ.

Æquatio definiens curvam AFH (fig. 35.) est $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \sqrt{NOLM}$, ubi $CO = CB = x$, $DR = OP = \dot{x}$, $BR = \dot{y}$, $NFGM = A^2$. Jam area indeterminata $NOLM$ dicatur ζ^2 , et erit $A\dot{y} = \zeta \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$, et indè $\zeta^2 = \frac{A^2 \dot{y}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = NOLM$. Hujus æqua-

tionis capiatur fluxio, et erit $\zeta \dot{\zeta} = \frac{A^2 \dot{x}^2 \dot{y} \ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$

$= \frac{1}{2} POLK = \frac{1}{2} PO \times LO = \frac{1}{2} \dot{x} \times OL$.

Undè dividendo per \dot{x} habebimus ordinatam

$OL = \frac{2 A^2 \dot{x} \dot{y} \ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$ vel $OL = \frac{A^2 \ddot{x} \dot{y} \ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$; ex

datâ verò ordinatâ OL ad Abscissam x pertinente, dabitur curva MLG . Q. E. I.

Methodus disponendi quotcunque Sphæras in Fornicem; et indè demonstratur Proprietas præcipua Curvæ Catenariæ.

P R O B L E M A.

Datas quotcunque Sphæras æquales in Fornicem ita disponere ut gravitate suâ se mutuo sustineant.

Sphæaræ altissimæ centrum sit A , (*fig 39.*) duarum verò huic contiguarum centra sint B , b : Duc DC secantem AB in C ipsi Ab parallelam: sintque radii AD , BG horizonti perpendiculares. Junge DG et in eâ producta sit $GF = AC$: ducatur BF in quâ sit $BE = BA$; atque erit E centrum sphæaræ proximæ. Sit radius ER ad horizontem perpendiculis, junge GR , et in eâ producta sit $RK = BF$; ducatur EK , in quâ sit $EH = EB$; atque erit H centrum proximæ Sphæaræ. Sit radius HL ad horizontem perpendiculis, junge RL et in eâ producta sit $LN = KE$. Ducatur HN , in quâ sit $HM = HE$ atque erit M centrum proximæ. Et sic proceditur in infinitum. Q. E. I.

Demonstratio.

Omnes hæ Sphæaræ triplici potentiâ urgentur: et constat ex *Mechanicâ*, quod tres po-

tentiæ in æquilibrio consistentes eam ad se invicem rationem habent, quam tres rectæ potentiarum directionibus respectivè parallelæ et ad ipsarum intersectiones mutas terminatæ. Sphæra AD urgetur gravitate ab A versùs D tendente, et actione sphærarum contiguarum in rectis AB , Ab . Adcoque si radius AD exponat gravitatem Sphæræ absolutam, AC exponet vim quâ Sphæra AD urget Sphæram BG à B versùs E . Item BF exponet vim quâ Sphæra ER urget Sphæram HL , EK vim quâ Sphæra HL urget Sphæram sequentem. Et sic in infinitum. Vis BF resolvitur in vires BG , GF : id est, BG , AC : et iisdem æquipollet. Est verò BG vis gravitatis globi et AC vis quâ Sphæra AD urget Sphæram BG : et hæ duæ vires componunt omne pondus sustinendum à Sphærâ ER ; scilicet unaquæque Sphæra sustinere debet omne pondus quod sustinet proximè superior Sphæra unà cum ipsius gravitate absolutâ. Et vis EK æquipollet viribus ER , RK vel ER , BF id est vi gravitatis Sphæræ ER et omni pondere quam eadem sustinet. Atque sic pergendo in infinitum, videbis ubique Sphærarum situm ita esse comparatum, ut earum quælibet sustinere potest omne pondus quod sustinet Sphæra immediatè superior, unà cum ipsius gra-

vitæ absolutâ : adeoque hæ Sphæræ erunt in æquilibrio, et vi gravitatis sese sustinebunt.

Theorema.

Sint M et H centra duarum Sphærarum contiguarum; duc Hd , Md ; hanc horizonti parallelam, illam vero eidem normalem. Dico semper esse Md ad dH ut data quædam recta ad summam diametrorum Sphærarum omnium quam sustinet Sphæra cujus centrum M .

A centris Sphærarum B , E , H , M , &c. in radios productos (si opus est) AD , BG , ER , HL , &c. demitte normales BT , EW , HY , Md , &c. In eosdem radios sint etiam perpendiculares CS , FX , KZ , NQ , &c. Patet ex constructione esse

$$CS = FX = KZ = NQ$$

adeoque est NQ data recta, quæque ex angulo BAD assumpto ad libitum determinatur. Ex constructione etiam patet esse $AS = \frac{1}{2} AD = GX$, $RY = \frac{1}{2} AD$ et $EZ = \frac{2}{3} AD$, $HQ = \frac{7}{8} AD$, &c. Et est Md ad dH ut NQ ad QH , hoc est, ut data recta ad $\frac{7}{8} AD$ vel ut $2 NQ$ ad $7 AD$, est vero $7 AD (= AB + BE + EH + HM)$ summa diametrorum omnium Sphærarum quas sustinet Sphæra, cujus centrum M . Constat ergo Theorema. Q. E. D.

Supponamus

Supponamus filum tenue transire per centra omnium Sphærarum, cujus extremitates fixæ sunt in punctis M , P ; et tum Sphæras deorsum converti; atque illæ liberè pendentes situm priorem inter se retinebunt. Nam potentialiarum solummodo directiones, non magnitudines mutantur.

Augeatur numerus Sphærarum et minuantur earum Diametri in infinitum, et filum illud evadet curva *Catenaria*; et Md erit incrementum Ordinatæ, dH incrementum abscissæ: et summa diametrorum Sphærarum quas sustinet Sphæra cujus centrum M , erit longitudo curvæ inter verticem A et punctum M intercepta, et quantitas data NQ evadet radius curvaturæ in vertice.

Undè catenæ proprietas hæc est; ut incrementum ordinatæ ad incrementum abscissæ, ita duplus radius curvaturæ in vertice ad longitudinem curvæ inter verticem et ordinatam illam interceptæ. Q. E. D.

Et similiter invenies Figuram fornicis vel catenæ in quâcunque hypothesi gravitatis, quamvis Sphære non sint æquales, vel etiam si essent Sphæroides.

*Solutio Problematis à Leibnitio
nuper propositi.*

P R O B L E M A.

*Invenire Lineam quæ ad angulos rectos secabit
omnes Hyperbolas Conicas iisdem verticibus
et circà eundem axem descriptas.*

Sit recta $P G D B$ axis, F centrum et G, D vertices Hyperbolarum, A punctum in axe quodlibet per quod transire supponitur curva quæsita $A C Z Q$; quam tangat CH in C , cui normalis sit CE ; quæ propterea tanget Hyperbolam in C quæ axem habet GD , vertices G, D et transit per punctum C . Unde (per naturam Hyperbolæ) est BF ad FD sicut FD ad FE .

Hisce præmissis sit Abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$, $AF = a$, $DF = c$. Eritque $BF = a - x$: quibus valoribus in priorî analogiâ substitutis, est

$$a - x : c :: c : EF = \frac{c^2}{a - x} \text{ et}$$

$$BF - EF = a - x - \frac{c^2}{a - x} = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} = EB.$$

Jam in curvâ AC , ut ordinata BC ad subtangentem BH ita est fluxio ordinatæ ad fluxionem Abscissæ: hoc est $BC : BH :: \dot{y} : \dot{x}$

propter verò similia triangula $EB C, CBH$,
est $EB : BC :: BC : BH$, undè ex æquo
 $EB : BC :: \dot{y} : \dot{x}$ ubi si pro EB et BC substitu-
antur eorum valores, proveniet

$$\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} : y :: \dot{y} : \dot{x}.$$

Ergo $y \dot{y} = \dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$

est æquatio curvam quæsitam AC definiens.
Q. E. I.

Patet hanc æquationem à fluxionibus libe-
rari non posse, nam quantitas

$$\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$$

est fluxio areæ hyperbolæ, cujus ordinata est

$$\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$$

pertinens ad abscissam x . Hæc autem Hyper-
bola Asymptotos habet SFT , et XFY ,
quarum illa est axi GD normalis, hæc vero
cum illa continet angulos SFX, YFT se-
mirectos; et jacet Hyperbola in angulis illis
deinceps, per Hyperbolarum vertices G, D
transiens.

Hac Hyperbolâ semel descriptâ, ut in Sche-
mate, curvam sic construo. Ducatur ordinata
prima AK secans Hyperbolam in K , et oc-
currat ordinata quævis alia BC eidem in L ;

atque erit $\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ vel $y \dot{y}$

fluxio areæ Hyperbolicæ $AKLB$; undè regrediendo ad fluentes, erit $\frac{1}{2}y^2 = \text{areæ } AKLB$, et $y^2 = 2AKLB$, atque $y = \pm \sqrt{2AKLB} = BC$ vel Bc , qui duo valores propter contraria signa ad partes Abscissæ contrarias jacent.

1. Patet hanc curvam ad A incipere, ubi incipit area AL , nec ultra punctum A versus H extendi. Nam si area $AKLB$ pro affirmativâ habeatur, omnis area alia quæ ad alias Abscissæ vel Ordinatæ partes jacet erit negativa; et area negativa, quæ latus quadratum non admittit, demonstrat ordinatæ impossibilitatem.

2. Ordinata maxima transit per punctum D . Nam area $AKLB$; (cujus radici quadratæ æqualis est ordinata) continuo crescit dum progreditur punctum B ab A versus D postquam verò ordinata BL ultrâ punctum D in situm bl pervenit, minuenda est area AKD areâ blD , ob arearum plagas contrarias, et tunc erit $bc = \sqrt{(2AKD - 2blD)}$.

3. Et Ordinata bc progrediendo à D ad Q continuò minuitur donec tandem ad Q evanescit; tunc existente areâ affirmativâ AKD æquali areæ negativæ QMD .

4. Si sit $FR = FQ$ ad partes contrarias

sita, ordinata imaginaria erit inter puncta Q et R , ob negativam aream prævalentem, et ad R iterum incipiet esse realis. Etenim area, cujus lateri quadrato æqualis est ordinata, manebit negativa donec area affirmativa infinita $FRNS$ evadat æqualis areæ negativæ infinitæ $FQMT$.

5. Atque inter puncta R et G ordinata eodem modo increcet, quo prius decrevit inter puncta D , Q ; et inter puncta G , P , ubi est $FA = FP$, ordinata rursus continuò decrecet, atque tandem ad punctum P evanescet.

6. Ex his omnibus conjunctim constat Lineam de quâ quærebatur, fore curvam Irrationalem quarti ordinis (quam scilicet recta in quatuor tantum punctis secare potest) constantem ex duabus Ovalibus æqualibus, similibus, et similiter positis, quæ habent punctum duplex in plagâ Ordinatarum ad distantiam infinitam.

Radius curvaturæ ad punctum A æqualis est AK ordinatæ Hyperbolæ per punctum A transeuntis. Concipe enim Abscissam AB esse infinite parvam, et radius curvaturæ ad punctum A æqualis erit $\frac{BC^2}{2AB} = \frac{y^2}{2x}$: est vero in primâ suâ magnitudine

$$y^2 = 2 AB \times AK = 2 x \times AK :$$

Radius curvaturæ ad punctum A æqualis est ergo AK ; et eodem modo ostenditur Radium curvaturæ ad Q fore QM .

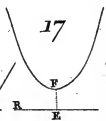
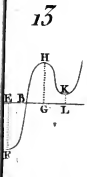
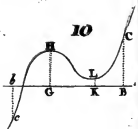
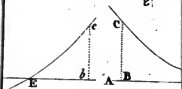
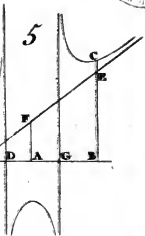
WPw , ZAz partes curvæ duæ exteriores secant omnes Hyperbolas, ad angulos rectos qui axem habent rectam GD . Partes duæ reliquæ interiores WRw , ZQz ad angulos rectos secant omnes Ellipses qui axem habent GD . Adeoque ejusdem curvæ portiones diversæ satisfaciunt problemati in Ellipsi et Hyperbolâ; Ellipsis vero cujus axis minor coincidit cum axe Parabolæ, et centrum cum vertice, et cujus axis major est ad minorem ut diameter quadrati ad latus; secabit omnes Parabolas circà axem illum eodem vertice descriptas.

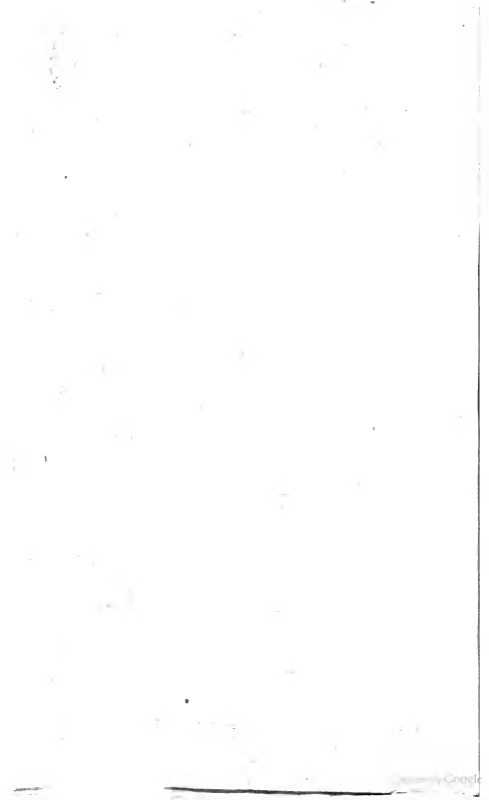
FINIS.

TYPIS J.-R. LOTTIN, 1797.

608131

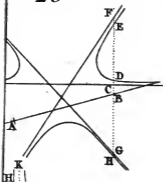




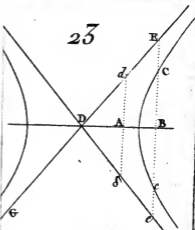


STIRLI

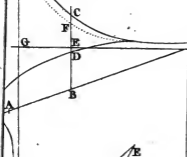
20



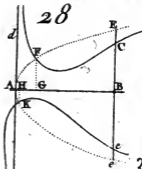
23



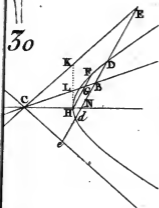
26



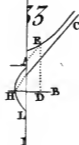
28



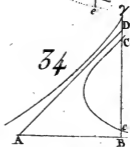
30



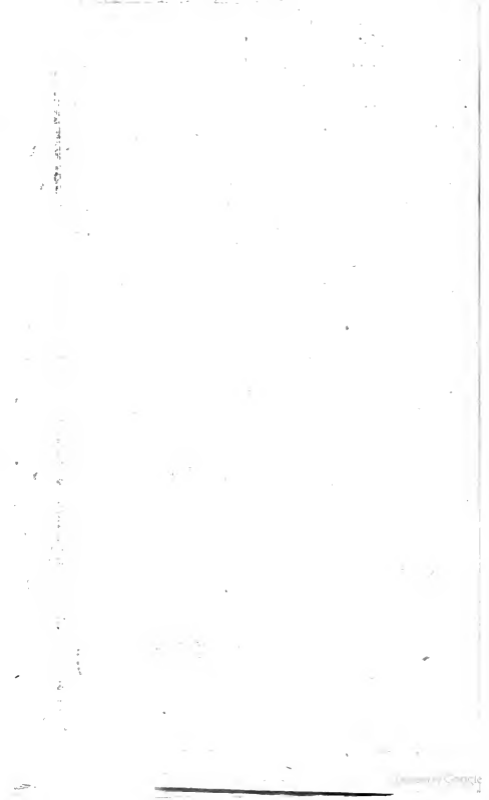
33



34

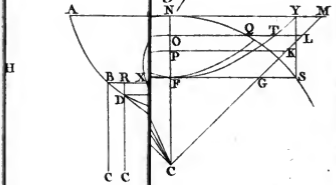


Durasseau Sculp.

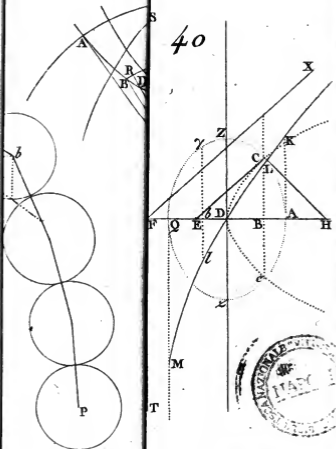


STT

37



40



Durieux Sculp.

